Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 519.3 : 62-50

МАТЕМАТИКА

М. И. ГУСЕВ

ВЕКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 19 X 1971)

В большинстве исследований по оптимизации управляемых систем ставится вопрос об отыскании управления, оптимального по какому-то одному избранному критерию. Одновременный учет нескольких показателей приводит к задачам так называемой векторной оптимизации ([1-5]).

В настоящей заметке исследуется вопрос о построении управления линейной системой, минимизирующего векторный критерий. Изложение основано на возможности представления задач линейного управления как задач оптимизации в банаховых пространствах ([6]).

1. Пусть $\mathscr{L}$ — линейное пространство, $K \subset \mathscr{L}$ — выпуклый конус. Определим в $\mathscr{L}$ порядок, полагая $y_2 \leqslant y_1$, если $y_1 - y_2 \in K$. Оператор $F: S \to \mathscr{L}$ (S — выпуклое подмножество линейного пространства $\mathscr{E}$) будем называть выпуклым, если $F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in S$, $0 < \lambda < 1$, $\lambda \in R^1$.

Будем говорить, что точка $x_0 \in S$ доставляет решение задачи минимизации оператора $F(x)$ ($F(x_0) = \min$) на множестве S, если для любого $x \in S$ из неравенства $F(x) \leqslant F(x_0)$ следует $F(x_0) \leqslant F(x)$.

Если K — конус в банаховом пространстве B. то через $\hat{K}$ будем обозначать его поляру: $\hat{K} = \{f \in B^* \mid \langle f, y\rangle \leqslant 0 \ \forall y \in K\}$ (B^* — пространство, сопряженное к B, $\langle f, y\rangle$ — значение функционала f в точке y). Для произвольного множества $W \subset B$ через $\rho_W(f)$ будем обозначать опорный функционал W: $\rho_W(f) = \sup\limits_x \langle f, x\rangle$, $x \in W$, $f \in B^*$.

Пусть $X, Y_0, \ldots, Y_n$ — банаховы пространства, T_i: $X \to Y_i$, $i = 1, \ldots, n$,— линейные ограниченные операторы, E_i — выпуклое замкнутое подмножество Y_i, e_i — элемент Y_i, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть U — выпуклое подмножество X, компактное в слабой топологии, порядок в Y_0 определяется замкнутым выпуклым конусом $\Gamma \subset Y_0$, $\Gamma \neq -\Gamma$, F: $U \to Y_0$ — выпуклый оператор.

Рассматривается задача

$$F(x) = \min, \tag{1}$$

$$x \in U, \tag{2}$$

$$T_i x + e_i \in E_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Вопросы оптимизации при наличии операторных ограничений исследовались, например, в работах ([7-10]). Задача (1)—(3) отличается спецификой условий (2), (3), возникающих в задачах линейного оптимального управления ([6, 11, 12]).

Определим на множестве $\hat{\Gamma} \times X^*$ функцию

$$\zeta(f_0, f) = \sup_{x \in U}\{\langle f_0, F(x)\rangle + \langle f, x\rangle\}, \quad f_0 \in \hat{\Gamma}, \quad f \in X^*,$$

и на множестве $\hat{\Gamma} \times Y_1^* \times \cdots \times Y_n^* \times Y_0$ функцию

$$\psi(f_0, f_1, \ldots, f_n, y) = \zeta\Big(f_0, \sum_1^n T_i^* f_i\Big) + \sum_1^n \rho_{E_i}(-f_i) + \sum_1^n \langle f_i, e_i\rangle - \langle f_0, y\rangle,$$

$f_0 \in \hat{\Gamma}$, $f_i \in Y_i^*$, $i = 1, \ldots, n$, $y \in Y_0$, T_i^* — сопряженный к T_i оператор.

Условие А. Для любого $g \in \hat{\Gamma}$ функционал $\varphi_g(x) = \langle g, F(x)\rangle$ полунепрерывен сверху на U в слабой топологии X.

Теорема 1. *Пусть $F(x)$ — выпуклый оператор, удовлетворяющий условию А, y — произвольный элемент из Y_0. Для совместности условий* (2), (3) *и неравенства*

$$F(x) \leqslant y \tag{4}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\inf_{f_0, f_1, \dots, f_n} \psi(f_0, f_1, \dots, f_n) = 0, \quad f_0 \in \hat{\Gamma}, \quad f_i \in Y_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{5}$$

Доказательство опирается на использование теорем об отделимости выпуклых множеств ([13], [14]) и теоремы Фань Цзи о разрешимости на компакте системы выпуклых неравенств ([15]).

Положим $F(x) \equiv 0$, $y = 0$, тогда (4) тривиально, и из (5) получаем (см. ([15]))

Следствие 1. *Для совместности условий* (2), (3) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_{f_1, \dots, f_n} \left\{\rho_U\left(\sum_1^n T_i^* f_i\right) + \sum_1^n \rho_{E_i}(-f_i) + \sum_1^n \langle f_i, e_i\rangle\right\} = 0, \tag{6}$$
$$f_i \in Y_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема 2. *Пусть оператор F: $U \to R^m$ (R^m — m-мерное эвклидово пространство) удовлетворяет условию А и $\Gamma = \{\xi \in R^m \mid \xi_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, m\}$. Для того чтобы существовало решение задачи* (1) — (3), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение* (6).

Условие В. Множество $F(U)$ ограничено.

Условие С. Если $g_k \to g_0$ в слабой (*) топологии Y_0^* и $g_k \in \hat{\Gamma}$, то $\|g_k\| \to \|g_0\|$, $k \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть пространства Y_i, $i = 1, \dots, n$, сепарабельны, $\operatorname{int} E_i \neq \phi$, $i = 1, \dots, n$ ($\operatorname{int} E_i$ — внутренность E_i) и выполнены условия А, В, С. Если x_0 есть решение задачи* (1) — (3) *и $y_0 = F(x_0)$, то существует нетривиальное решение $f_0^0, f_1^0, \dots, f_n^0$ задачи*

$$\inf_{f_0, f_1, \dots, f_n} \psi(f_0, f_1, \dots, f_n, y_0) = 0, \quad f_0 \in \hat{\Gamma}, \quad f_i \in Y_i^*, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Если Y_i конечномерно, то требования непустоты $\operatorname{int} E_i$ в теореме 3 может быть опущено. Заметим также, что если E_i — конус, то $f_i^0 \in E_i^* = -\hat{E}_i$.

Теорема 4. *Пусть x_0 — решение задачи* (1) — (3), *$y_0 = F(x_0)$ и функционалы f_i^0, $i = 0, 1, \dots, n$, доставляют решение задачи* (7).

Тогда x_0 удовлетворяет принципу максимума

$$\langle f_0^0, F(x_0)\rangle + \left\langle \sum_1^n T_i^* f_i^0, x_0 \right\rangle = \max_{x \in U} \left\{\langle f_0^0, F(x)\rangle + \left\langle \sum_1^n T_i^* f_i^0, x \right\rangle\right\}, \tag{8}$$

а векторы $y_i^0 = T_i x_0 + e_i$ соотношениям

$$\langle f_i^0, y_i^0\rangle = \min_{y \in E_i} \langle f_i^0, y\rangle, \quad i = 1, \dots, n. \tag{9}$$

2. Рассмотрим управляемую систему

$$dx / dt = A(t)x + B(t)u + f(t), \tag{10}$$

где x — k-мерный вектор, u — r-мерное управление, $A(t)$, $B(t)$ — непрерывные матрицы, $f(t)$ — интегрируемая функция на $[t_\alpha, t_\beta]$, моменты времени t_α, t_β фиксированы.

Допустимым управлением будем называть любую измеримую вектор-функцию $u(t)$ со значениями из множества $\mathcal{U}$:

$$u(t) \in \mathcal{U}, \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta, \tag{11}$$

такую, что отвечающее ей решение системы (10) удовлетворяет фазовым ограничениям

$$Px(t) \in \mathcal{P}, \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta, \tag{12}$$

и краевому условию

$$x(t_\alpha) = x^\alpha, \quad Qx(t_\beta) \in \mathcal{M}. \tag{13}$$

Здесь $\mathcal{U}$ — выпуклый компакт в R^r, $\mathcal{P}$, $\mathcal{M}$ — выпуклые замкнутые множества в R^p, R^q соответственно (R^r, R^p, R^q — конечномерные эвклидовы пространства размерностей r, p, q), $\operatorname{int} P = \phi$, P и Q — постоянные матрицы размеров $p \times k$ и $q \times k$, $x^\alpha \in R^k$.

Пусть задано m функционалов $F_j(u)$

$$F_j(u) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \varphi_j(t, u(t))\, dt, \quad j = 1, \ldots, m,$$

где $\varphi_j(t, u)$ — непрерывные, выпуклые по u функции. Будем говорить, что допустимое управление $u^0(t)$ решает задачу оптимального управления (является неулучшаемым по критерию $F(u) = (F_1(u), \ldots, F_m(u))$), если для любого допустимого $u^*(t)$, удовлетворяющего условию $F_j(u^*) \leqslant \leqslant F_j(u^0)$, $j = 1, \ldots, m$, $F(u^*) = F(u^0)$.

Используя формулу Коши для решения системы (10), исходную задачу представим в форме (1)—(3), где $n = 2$; U — подмножество банахова пространства $L_2^{(r)}$, состоящее из функций, удовлетворяющих условию (11); $Y_0 = R^m$, $\Gamma = \{\xi \in R^m \mid \xi_i \geqslant 0, \ i = 1, \ldots, m\}$; E_1 — подмножество $C^{(p)}$, состоящее из функций $\varphi(t) : \varphi(t) \in \mathcal{P}_t, t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$, $E_2 = \mathcal{M}$, $e_1 = e_1(t) = PX(t, t_\alpha)x^\alpha + P \int_{t_\alpha}^{t} X(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$, $e_2 = QX(t_\beta, t_\alpha)\, x^\alpha + Q \int_{t_\alpha}^{t_\beta} X(t_\beta, \tau) f(\tau)\, d\tau$; операторы T_1: $L_2^{(r)} \to C^{(p)}$, T_2: $L_2^{(r)} \to R^q$ определяются условиями

$$T_1 u = P \int_{t_\alpha}^{t} X(t, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,$$

$$T_2 u = Q \int_{t_\alpha}^{t_\beta} X(t_\beta, \tau)\, B(\tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Здесь $L_2^{(r)}$ — пространство измеримых r-вектор функций, суммируемых на $[t_\alpha, t_\beta]$ с квадратом конечномерной нормы, $C^{(p)}$ — пространство непрерывных на $[t_\alpha, t_\beta]$ p-вектор-функций, метрики в $L_2^{(r)}$, $C^{(p)}$ определяются обычным образом; $X(t, \tau)$ — фундаментальная нормированная матрица однородной системы.

Положим

$$\psi(\lambda, \Lambda, l, F) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \gamma \Big[\tau, \lambda, \Big(\int_{\tau}^{t_\beta} d\Lambda'(t)\, PX(t, \tau) + l'QX(t_\beta, \tau)\Big) B(\tau)\Big]\, d\tau + \operatorname*{var}_{t_\alpha}^{t_\beta} \rho_{\mathcal{P}}(-\Lambda(t)) + \rho_M(-l) + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} d\Lambda'(t)\, e_1(t) + l'e_2 - \lambda' F,$$

где λ — m-мерный вектор с неположительными компонентами, $l\in R^q$, $F\in R^m$, $\Lambda(t)$ — p-вектор-функция ограниченной вариации на $[t_\alpha, t_\beta]$,

$$\gamma(\tau, \lambda, s) = \sup_u \{\lambda'\varphi(\tau, u) + s'u\}, \quad u\in U, \quad s\in R^r,$$

$\varphi'(\tau, u) = (\varphi_1(\tau, u), \ldots, \varphi_m(\tau, u))$, штрих означает транспонирование.

Теорема 5. *Для совместности условий* (11) — (13) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf\nolimits_{\Lambda, l}\psi(0, \Lambda, l, 0) = 0, \quad \Lambda\in C^{(p)*}, \quad l\in R^q. \tag{14}$$

Если условие (14) *выполнено, то решение задачи оптимального управления* $u^0(t)$ *существует и удовлетворяет принципу максимума*

$$\begin{aligned}&\lambda^{0\prime}\varphi(\tau, u^0(\tau)) + s^0(\tau)B(\tau)u^0(\tau) =\\ &= \max_{u\in\mathcal{U}}\{\lambda^{0\prime}\varphi(\tau, u) + s^0(\tau)B(\tau)u\}, \quad t_\alpha\leqslant t\leqslant t_\beta,\end{aligned} \tag{15}$$

а отвечающее $u^0(t)$ *решение* $x^0(t)$ *системы* (10) *соотношению*

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} d\Lambda^{0\prime}(t)Px^0(t) = \min_{\varphi(t)\in\mathcal{P}}\int_{t_\alpha}^{t_\beta} d\Lambda^{0\prime}(t)\varphi(t), \tag{16}$$

где $\lambda^0, \Lambda^0, l^0$ — *нетривиальное решение задачи*

$$\inf_{\lambda, \Lambda, l}\psi(\lambda, \Lambda, l, F^0) = 0, \quad \lambda\in\hat{\Gamma}, \Lambda\in C^{(p)*}, \ l\in R^q, \quad F^0 = F(u^0).$$

а $s^0(\tau)$ — *решение сопряженной системы в распределениях* ([11]),

$$ds/d\tau = -sA(\tau) - d\Lambda^{0\prime}/d\tau P - l^{0\prime}Q\delta(t - t_\beta), \quad s(\tau)\equiv 0, \quad \tau > t_\beta.$$

Задача имеет, вообще говоря, континуум решений, векторы $F(u^0)$ образуют некоторую поверхность в R^m.

Автор выражает глубокую благодарность А. Б. Куржанскому за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики и механики
Уральского научного центра
Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
28 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. A. Zadeh, IEEE Trans. Automat. Control., AC-8, № 1, 59 (1963). [2] S. S. L. Chang, SIAM J. Control., 4, № 1, 46 (1966). [3] N. O. Da Cunha, E. Polak, J. Math. Anal. Appl., 19, № 1, 103 (1967). [4] А. М. Летов, Дифференциальные уравнения, 6, № 4, 592 (1970). [5] М. Е. Салуквадзе, Автоматика и телемеханика, № 8, 5 (1970). [6] Н. Н. Красовский, Теория управления движением, М., 1968. [7] К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, М., 1962. [8] K. Ritter, Math. Ann., 184, № 2, 133 (1970). [9] L. W. Neustadt, Lect. Notes Math., 132, 292 (1970). [10] Б. Н. Пшеничный, Э. И. Ненахов, Кибернетика, № 3, 35 (1971). [11] А. Б. Куржанский, Ю. С. Осипов, ПММ, 33, № 4, 705 (1969). [12] М. И. Гусев, А. Б. Куржанский, Дифференциальные уравнения, 7, № 9 (1971). [13] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, 3, в. 1, 3 (1948). [14] К. Иосида, Функциональный анализ, М., 1967. [15] Ky Fan, Math. Zs., 68, № 2, 205 (1957).