Г. М. ЖИСЛИН

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРОВ ЭНЕРГИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ МНОГИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 13 III 1972)

1. В настоящей заметке формулируются достаточные условия конечности дискретного спектра дифференциальных операторов (1), (4) в пространствах функций заданной симметрии. Эти операторы являются операторами энергии квантовых систем в отсутствие внешнего поля и во внешних магнитном и электрическом статических полях. Полученные условия позволяют во многих случаях свести задачу о конечности дискретного спектра операторов энергии многочастичных систем к аналогичной задаче для двухчастичных систем*.

Найденные нами достаточные критерии конечности применимы, в частности, к системам с короткодействием. Для некоторых классов взаимодействий эти критерии близки к необходимым.

Гипотеза о справедливости подобных условий конечности дискретного спектра впервые выдвинута в (4). Какие-либо результаты для операторов (1), (4) при $n \geq 3$ ранее отсутствовали, исключая (5), где рассмотрен частный случай (4) для отрицательных атомарных и молекулярных ионов (с неподвижными ядрами) без учета магнитного поля. Для $n = 2$ ряд условий конечности дискретного спектра оператора (4) при $V_{12} \geq 0$ и без учета симметрии был ранее получен в (6, 7). Наши условия в этом случае менее ограничительны.

2. Оператор энергии движения относительно центра масс квантовой системы $Z_1 = (1, 2, \dots, n)$ n частиц ($n > 2$) с массами m_i имеет вид (8)

$$H_0 = -\Delta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{1, n} V_{ij}(r_{ij}), \quad (1)$$

где Δ_0 — инвариантно заданный на $C_j^2(R_0)$ оператор Лапласа,

$$V_{ij}(r_{ij}) = V_{ji}(r_{ji}), \quad R_0 = \left\{ r, r \in R^{3n}, \sum_{i=1}^n m_i r_i = 0 \right\}, \quad r = (r_1, \dots, r_n), \\ r_i = (x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i}).$$

Пусть $Q(R_1)$ — класс вещественных функций $V(r_1)$, для которых

$$\int_{|r_1| \leq B} |V(r_1)|^2 dr_1 < +\infty, \quad B \text{ любое, } \lim_{|r_1| \rightarrow +\infty} \int_{|r_1 - r_1'| \leq 1} |V(r_1)|^2 dr_1 = 0.$$

Всюду далее $V_{ij}(r_1) \in Q(R_1)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Оператор H_0 , определенный на $C_j^2(R_0)$, расширим до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение.

3. Пусть $S(Z_1)$ — группа перестановок тождественных частиц системы Z_1 , $\mathcal{R}$ — полная группа вращений трехмерного пространства. Группу симметрии оператора H_0 обозначим G . Далее считаем $G = G_1 = S(Z_1) \times \mathcal{R}$ или $G = S(Z_1)$. Типы неприводимых представлений группы G будем обозначать σ , отвечающий σ проектор — P^σ (8).

* Которые достаточно хорошо исследованы (см., например, (1-3)).

Оператор $H_0^\sigma \equiv H_0 P^\sigma$ самосопряжен в $\mathfrak{H}^\sigma \equiv P^\sigma \mathcal{L}^2(R_0)$. В п. 6 устанавливаются условия конечности дискретного спектра H_0^σ .

4. Обозначим через $Z_h = (C_1, \dots, C_h)$ разбиение исходной системы на h непустых подсистем C_i . Пусть $R_0^{Z_h} = \{r, r \in R_0, \sum_{i \in C_t} m_i r_i = 0, t = 1, 2, \dots, h\}$. Оператор энергии относительного движения подсистем есть ⁽⁸⁾

$$H_0(Z_h) = -\Delta_0^{Z_h} + \frac{1}{2} \sum_l \sum_{i, k \in C_l}^{1, h} V_{ik}(r_{ik}).$$

Оператор $H_0(Z_h)$, определенный на $C_f^2(R_0^{Z_h})$, расширим до самосопряженного в $\mathcal{L}^2(R_0^{Z_h})$, сохраняя прежнее обозначение.

5. Пусть $S(C_i)$ — группа перестановок всех тождественных частиц из $C_i, C_i \in Z_h; S(Z_h)$ — группа, состоящая из всех перестановок gg , где g пробегает группу $S(C_1) \times \dots \times S(C_h)$, а g — подгруппу перестановок (из $S(Z_1)$), меняющих местами тождественные подсистемы C_i из Z_h . Положим $\tilde{G} = S(Z_h) \times \mathcal{R}$ при $G = G_1, \tilde{G} = S(Z_h)$ при $G = S(Z_1)$. $\tilde{G}$ — группа симметрии оператора $H_0(Z_h)$. Типы неприводимых представлений группы $\tilde{G}$ в пространстве $\mathcal{L}^2(R_0^{Z_h})$ будем обозначать $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(Z_h)$; отвечающий $\tilde{\sigma}$ проектор — $P^{\tilde{\sigma}}$. Оператор $H_0^{\tilde{\sigma}}(Z_h) \equiv H_0(Z_h)P^{\tilde{\sigma}}$ самосопряжен в $\mathfrak{H}^{\tilde{\sigma}} = P^{\tilde{\sigma}} \mathcal{L}^2(R_0^{Z_h})$. Так же, как в ⁽⁸⁾, определим понятие индуцирования ($\prec$) симметрии $\tilde{\sigma}$ подсистемы Z_h симметрией σ всей системы Z_1 и положим

$$\mu(\sigma; Z_h) = \inf_{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(Z_h) \prec \sigma} \{\inf H_0^{\tilde{\sigma}}(Z_h)\}, \quad \mu^\sigma = \min_{Z_h, h \geq 2} \mu(\sigma; Z_h);$$

μ^σ — нижняя граница предельного спектра оператора H_0^σ ⁽⁸⁾. Пусть $O_h(\sigma) = \{Z_h, \mu(\sigma; Z_h) = \mu^\sigma\}$. Распадение Z_2 назовем устойчивым, если дискретный спектр оператора $H_0(Z_2)$ в пространстве $\sum_{\tilde{\sigma} \prec \sigma} \mathfrak{H}^{\tilde{\sigma}}$ не пуст.

6. Пусть $\mathcal{F}_\delta(R_1), 0 < \delta < 1$, — класс всех функций $V(r_1), V(r_1) \in Q(R_1)$, для которых дискретный спектр оператора $-(1-\delta)\Delta_1 + V(r_1)$ в $\mathcal{L}^2(R_1)$ конечен; $\mathcal{F}(R_1) = \bigcup_{\delta} \mathcal{F}_\delta(R_1)$. Пусть, далее, $\gamma > 0, B > 0$ — неко-

торые числа, $\rho^2 = \frac{1}{2} \sum_{i, j}^{1, n} |r_{ij}|^2$. Для каждого $Z_2 = (C_1, C_2)$ положим $M_k = \sum_{j \in C_k} m_j, k=1, 2, M = M_1 + M_2, M_{1,2} = M_1 M_2 M^{-1}, \rho_{C_k}^2 = 0, 5 \sum_{i, j \in C_k} |r_{ij}|^2, \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \xi_{3-i} = \sqrt{M_{1,2}} \left(M_2^{-1} \sum_{j \in C_2} m_j x_{3j-i} - M_1^{-1} \sum_{j \in C_1} m_j x_{3j-i} \right), i = 0, 1, 2, K_{Z_2}(\gamma, B) = \{r, r \in R_0, \sqrt{\rho_{C_1}^2 + \rho_{C_2}^2} \leq \gamma \rho; \rho \geq B\}$.

Теорема 1. Пусть для оператора H_0^σ

А) все распадения Z_2 из $O_2(\sigma)$ устойчивы;

Б) для каждого $Z_2, Z_2 \in O_2(\sigma)$, существует такая функция $V_{Z_2}(r_1)$ из $\mathcal{F}(R_1)$, что при некоторых $\gamma > 0, B \geq 0$

$$\sum_{i \in C_1, j \in C_2} V_{ij}(r_{ij}) \geq V_{Z_2}(\xi) \quad \text{для } r \in K_{Z_2}(\gamma, B).$$

Тогда дискретный спектр H_0^σ не более чем конечен.

Замечания. 1) Условие А) равносильно условию $O_h(\sigma) = \phi$ для $h \geq 3$.

2) Пусть для каждого $Z_2 = (C_1, C_2) \in O_2(\sigma)$ и некоторого $B > 0$

$$V_{ij}(r_1) \geq \gamma_{ij} |r_1|^{-2}, \quad i \in C_1, j \in C_2, |r_1| \geq B. \quad (2)$$

Тогда для справедливости условия Б) достаточно, чтобы

$$\sum_{i \in C_1, j \in C_2} \gamma_{ij} > -0,25M_{1,2}^{-1}. \quad (3)$$

Отметим, что если хотя бы для одного устойчивого распада $Z_2 = (C_1, C_2) \in O_2(\sigma)$ выполняется $V_{ij}(r_i) \leq \gamma_{ij}|r_i|^{-2}$ при $i \in C_1, j \in C_2, |r_i| \geq B$ и $\sum_{i \in C_1, j \in C_2} \gamma_{ij} < -0,25M_{1,2}^{-1}$, то дискретный спектр H_0^σ бесконечен (*)^{*}.

7. Рассмотрим теперь оператор

$$H = \sum_k^{1, n} (ia_k \nabla_k + b_k(r_k))^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k}^{0, n} V_{ik}(r_{ik}), \quad (4)$$

где $n \geq 2, a_k > 0, b_k(r_k) = (b_{k1}, b_{k2}, b_{k3}), r_{0k} = r_k,$

$$V_{ik}(r_{ik}) \geq 0, \quad i, k = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$V_{ik}(r_{ik}) = V_{ki}(r_{ki}), \quad \nabla_k = (\partial / \partial x_{3k-2}, \partial / \partial x_{3k-1}, \partial / \partial x_{3k});$$

H — оператор энергии системы $Z_1 = (1, 2, \dots, n)$ n одноименно заряженных частиц с «массами» $m_i = a_i^{-2}$ во внешнем электромагнитном поле $b_k(r_k)$ и электростатическом поле $V_{0k}(r_k)$. Будем предполагать, что

$$\{V_{ij}(r_i), V_{0j}(r_i), |b_j(r_i)|^2, \operatorname{div} b_j(r_i), i, j = 1, 2, \dots, n\} \subset Q(R_1).$$

Оператор H , определенный на $C_f^2(R^{3n})$, расширим до самосопряженного, сохраняя прежнее обозначение. Группу симметрии оператора H обозначим через G . Далее предположим, что $G = G_1$ или $G = S(Z_1)$. Аналогично (*) для произвольного типа σ неприводимого представления группы G определим проектор P^σ . Оператор $H^\sigma \equiv HP^\sigma$ самосопряжен в $\mathfrak{H}^\sigma \equiv P^\sigma \mathcal{L}^2(R^{3n})$.

8. Вследствие условия (5) при исследовании спектра оператора H достаточно рассмотреть только такие распада $Z_2 = (C_1, C_2)$, у которых C_2 состоит из одного элемента. Поэтому всюду далее $Z_2 = (C_1, C_2)$ — распадение рассматриваемой системы Z_1 на подсистемы $C_1 = (i_1, \dots, i_{n-1}), C_2 = (j)$. Пусть $R' = \{r_{i_1}, \dots, r_{i_{n-1}}\}, C_1^0 = (0, i_1, \dots, i_{n-1}),$

$$H(Z_2) = H(C_1) = \sum_{k \in C_1} (ia_k \nabla_k + b_k(r_k))^2 + \sum_{\substack{k < s \\ k, s \in C_1^0}} V_{ks}(r_{ks}).$$

Оператор $H(Z_2)$, определенный первоначально на $C_f^2(R')$, расширим до самосопряженного оператора в $\mathcal{L}^2(R')$, сохраняя прежнее обозначение.

Пусть $G' = S(C_1) \times \mathcal{R}$, если $G = G_1$ и $G' = S(C_1)$ при $G = S(Z_1)$. G' — группа симметрии оператора $H(Z_2)$. Типы неприводимых представлений группы G' в пространстве $\mathcal{L}^2(R')$ будем обозначать σ' , соответствующий σ' проектор — $P^{\sigma'}$. Оператор $H^{\sigma'}(Z_2) \equiv H(Z_2)P^{\sigma'}$ самосопряжен в $\mathfrak{H}^{\sigma'} \equiv P^{\sigma'} \mathcal{L}^2(R')$. Комбинируя доказательства леммы 2.1 из (*) и теоремы 3 из (10), можно показать, что предельный спектр оператора H^σ состоит из всех точек луча $[\mu^\sigma, +\infty)$, где $\mu^\sigma = \min_{Z_2} \mu(\sigma; Z_2), \mu(\sigma; Z_2) = \inf_{\sigma' \in \tau} \{\inf H^{\sigma'}(Z_2)\}, \tau = \tau(\sigma; C_1)$ — множество всех типов σ' симметрии подсистемы C_1 , возможных при данном типе σ симметрии волновых функций всей системы ((9), стр. 598). Пусть $O_2(\sigma) = \{Z_2, \mu(\sigma; Z_2) = \mu^\sigma\}$. Распадение Z_2 назовем устойчивым, если оператор $H(Z_2)$ в пространстве $\sum_{\sigma' \in \tau} \mathfrak{H}^{\sigma'}$ имеет непустой дискретный спектр.

* В (*) это утверждение доказано без учета симметрии; однако оно справедливо и для оператора H_0^σ .

9. Пусть $\mathcal{F}_\delta(R_1; b_j)$, $0 < \delta < 1$, — класс всех функций $V(r_1)$, $V(r_1) \in Q(R_1)$, для которых дискретный спектр оператора $(i\nabla_1 + b_j(a_j r_1))^2 + \delta \Delta_1 + V(r_1)$ в $\mathcal{L}^2(R_1)$ конечен; $\mathcal{F}(R_1; b_j) = \bigcup_{\delta} \mathcal{F}_\delta(R_1, b_j)$.

Для каждого $Z_2 = (C_1, C_2)$, $C_2 = (j)$ и любых $\gamma > 0$, $B > 0$ положим $\eta = \sqrt{m_j r_j}$, $K_{Z_2}(\gamma, B) = \{r, r \in R^{3n}, \gamma|r|^2 - |r_j|^2 \leq \gamma|r_j|; |r_j| \geq B\}$.

Теорема 2. Пусть для оператора H^σ

А) все распадения Z_2 из $O_2(\sigma)$ устойчивы;

Б) для каждого $Z_2 = (C_1, C_2) \in O_2(\sigma)$ существует такая функция $V_{Z_2}(r_1)$ из $\mathcal{F}(R_1; b_j)$, что при некоторых $\gamma > 0$, $B > 0$

$$\sum_{i \in C_1} V_{ij}(r_{ij}) \geq V_{Z_2}(\eta), \quad r \in K_{Z_2}(\gamma, B).$$

Тогда дискретный спектр оператора H^σ не более чем конечен.

Замечания. 1) Для справедливости условия Б) достаточно, чтобы для каждого $Z_2 = (C_1, C_2) \in O_2(\sigma)$ существовала такая функция $\check{V}_{Z_2}(r_1) \in \mathcal{F}(R_1; 0)$, что при некоторых $\alpha', 0 < \alpha' < 1$, $\gamma > 0$, $B > 0$

$$(1 - \alpha')^{-1} \sum_{i \in C_1} V_{ij}(r_{ij}) \geq \check{V}_{Z_2}(\eta) + \alpha'^{-1} |b_j(a_j \eta)|^2, \quad r \in K_{Z_2}(\gamma, B). \quad (6)$$

В свою очередь, для выполнения (6) достаточно, чтобы а) функции V_{ij} подчинялись условиям (2), (3), в которых $C_1, C_2, M_{1,2}$ заменены на C_1^0, j и m_j ; б) $|r_1| |b_j(r_1)| \rightarrow 0$ при $|r_1| \rightarrow \infty$.

2) В случае $n = 2$ условие А) теоремы 2 может быть опущено.

10. Теоремы 1 и 2 с естественными изменениями остаются в силе для операторов (1), (4) без учета симметрии. Отметим, что при $n = 2$ для оператора H без учета симметрии теорема 2 в силу замечания 2 дает более тонкие критерии конечности дискретного спектра, чем все установленные в (6, 7).

Научно-исследовательский радиофизический институт
Горький

Поступило
21 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- М. С. Бирман, Матем. сборн., 55, 2, 123 (1961). ² J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. of U.S.A., 47, 1, 122 (1961). ³ J. Uchiyama, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 3, 1, 101 (1967). ⁴ B. Simon, Helv. Phys. Acta, 43, 6—7, 607 (1970). ⁵ Г. М. Жислицн, Теоретич. и матем. физика, 7, 3, 332 (1971). ⁶ I. Uchiyama, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, 5, 1, 51 (1969). ⁷ I. Uchiyama, ibid., 6, 1, 193 (1970). ⁸ А. Л. Сигалов, И. М. Сигал, Теоретич. и матем. физ., 5, 1, 73 (1970). ⁹ Г. М. Жислицн, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, 37, 590 (1969). ¹⁰ K. Jörgens, Univ. Heidelberg, Preprint.