Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 1

УДК 513.83 **МАТЕМАТИКА**

М. М. ЧОБАН

О B-ИЗМЕРИМЫХ СЕЧЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 II 1972)

Пара (Z, S), где Z — множество и S — тело подмножеств множества Z, называется пространством. Положим $\mathscr{A}(Z, S)$ — совокупность всех подмножеств множества Z, полученных при помощи A-операции, примененной к подмножествам семейства S. Обозначим $C\mathscr{A}(Z, S) = \{L \subseteq Z \mid Z \setminus L \in \mathscr{A}(Z, S)\}$ и $\mathscr{B}^*(Z, S) = \mathscr{A}(Z, S) \cap C\mathscr{A}(Z, S)$. Через $\mathscr{B}(Z, S)$ обозначим σ-алгебру, порожденную системой S. Множества систем $\mathscr{B}(Z, S)$, $\mathscr{B}^*(Z, S)$, $\mathscr{A}(Z, S)$ и $C\mathscr{A}(Z, S)$ соответственно назовем B-множествами, B^*-множествами, A-множествами и CA-множествами. Очевидно, что $\mathscr{B}(Z, S) \subseteq \mathscr{B}^*(Z, S)$ и $\mathscr{B}^*(Z, S)$ является σ-алгеброй.

Пусть X — топологическое пространство. Через S обозначим тело, порожденное нуль-множествами пространства X. В этом случае будем писать $\mathscr{B}(X, S) = \mathscr{B}(X)$, $\mathscr{B}^*(X, S) = \mathscr{B}^*(X)$, $\mathscr{A}(X, S) = \mathscr{A}(X)$ и $C\mathscr{A}(X, S) = C\mathscr{A}(X)$.

Предложение 1. *Пусть X — паракомпактное пространство. Если L является локально B^*-множеством пространства X, то $L \in \mathscr{B}^*(X)$.*

Пример. Пусть X есть дискретная сумма $\aleph_1$ канторовых совершенных множеств K_α, $\alpha < \omega_1$. В каждом пространстве K_α фиксируем B-множество L_α класса α. Тогда $L = \cup\{L_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ является локально B-множеством полного метрического пространства X. По построению, L не является B-множеством. Следовательно, для построенного пространства L имеем $L \in \mathscr{B}^*(X) \setminus \mathscr{B}(X)$.

Теорема 1. *Пусть X — полное метрическое пространство. $\mathscr{B}(X) = \mathscr{B}^*(X)$ тогда и только тогда, когда для некоторого σ-дискретного подмножества $L \subseteq X$ подпространство $X \setminus L$ сепарабельно.*

Теорема 2 ([1], стр. 88). *Пусть (Z, S) — пространство и $\{L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots\}$ — система CA-множеств.*

Тогда существует дизъюнктная система $\{M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots\}$ CA-множеств пространства (Z, S), для которой

1) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$; 2) $M_n \subseteq L_n$, $n = 1, 2, \ldots$; 3) если $Z = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$, то $\{M_n \mid n = 1, 2, \ldots\} \subseteq \mathscr{B}^*(Z, S)$.

Этот результат лежит в основе доказательства следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть θ: $Z \to \mathscr{F}(X)$ — такое отображение пространства (Z, S) в полное сепарабельное метризуемое пространство X, что $\theta^{-1}U \in C\mathscr{A}(Z, S)$ для любого открытого в X множества U. Через $\mathscr{F}(X)$ обозначим совокупность всех замкнутых подмножеств пространства X.*

Тогда существует такое однозначное отображение f: $Z \to X$, что $fz \in \theta z$ для любой точки $z \in Z$ и $f^{-1}U \in \mathscr{B}^*(Z, S)$, как только U открыто в X.

Доказательство. Пусть ρ — такая полная метрика на X, что $\rho(x, y) < 1$ для любых точек $x, y \in X$. Построим такую последовательность однозначных отображений f_n: $Z \to X$, что: 1) $\rho(f_n z, f_{n+1} z) < 3 / n$ и $\rho(f_n z, \theta z) < 1 / (n + 1)$ для любых $z \in Z$ и $n = 1, 2, \ldots$; 2) $f_n^{-1} U \in \mathscr{B}^*(Z, S)$ для любых $n = 1, 2, \ldots$ и всякого открытого в X множества U; 3) множество $f_n Z$ счетно для любого $n = 1, 2, \ldots$

Пусть x_0 — фиксированная точка в X. Положим f_1: $Z \to X$, где $f_1 z = x_0$ для любой точки $z \in Z$. Ясно, что f_1 — искомое отображение.

Допустим, что построены отображения $f_1 f_2, \ldots, f_n$.

Для каждой точки $x \in f_n Z$ положим $Ox = \{y \in X \mid \rho(x, y) < 1/(n+1)\}$ и $\gamma = \{Ox \mid x \in f_n Z\}$. Пусть $\theta_n z = \theta z \cap \gamma(f_n z)$, где $\gamma(f_n z) = \cup \{Ox \in \gamma \mid f_n z \in Ox\}$. По построению, $\theta_n z = \phi$ и $\operatorname{diam} \gamma(f_n z) < 1/n$. Если U открыто в X, то $\theta_n^{-1} U = \cup \{\theta^{-1}(U \cap Ox) \cap f_n^{-1} Ox \mid x \in f_n Z\}$. Это равенство вытекает из определения отображения θ_n: $Z \to \mathscr{A}(X)$, где $\mathscr{A}(X)$ — совокупность всех непустых подмножеств X. Поскольку множество $f_n Z$ счетно, то $\theta_n^{-1} U \in C\mathscr{A}(X)$, как только U открыто в X. Рассмотрим некоторое открытое покрытие $\varphi = \{U_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$ пространства X из множеств диаметра $< 1/(n+2)$. Тогда $Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} \theta_m^{-1} U_m$ и $\theta_n^{-1} U_m \in C\mathscr{A}(Z, S)$ для любого $m = 1, 2, \ldots$ В силу теоремы 2, существуют такие попарно непересекающиеся B^*-множества $M_1, M_2, \ldots, M_m, \ldots$, что $Z = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$ и $M_m \subseteq \theta_n^{-1} U_m$. В каждом множестве U_m фиксируем точку x_m. Положим f_{n+1}: $Z \to X$, где $f_{n+1} z = x_m$, как только $z \in M$. Ясно, что $\overline{f_{n+1}}^{1} U = \cup \{M_m \mid x_m \in U\}$ для любого множества $U \subseteq X$. Кроме того, $\rho(f_{n+1} z, \theta z) \leqslant \rho(f_{n+1} z, \theta_n z) < 1/(n+2)$. По построению, $\rho(f_{n+1} z, f_n z) \leqslant \rho(f_{n+1} z, \theta_n z) + \operatorname{diam} \theta_n z + \rho(f_n, \theta_n z) < 3/n$.

Поскольку $f_{n+1} Z = \{x_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$, то f_{n+1}: $Z \to X$ — искомое отображение. Отображения $\{f_n$: $Z \to X \mid n = 1, 2, \ldots\}$ построены. Поскольку ρ — полная метрика и $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(f_n z, f_{n+1} z) = \lim\limits_{n \to \infty} 3/n = 0$, то для любой точки $z \in Z$ существует точка $fz = \lim\limits_{n \to \infty} f_n z$. Так как $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(f_n, \theta z) = 0$, то $fz \in \theta z$ для любой точки $z \in Z$. В силу леммы Хаусдорфа (см. ([3])), f: $Z \to X$ является искомым отображением. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* θ: $Z \to \mathscr{F}(X)$ — *такое отображение пространства* (Z, S) *в полное сепарабельное пространство* X, *что* $\theta^{-1} F \in C\mathscr{A}(Z, S)$ *для любого замкнутого в* X *множества* F.

Тогда существует такое однозначное отображение f: $Z \to X$, *что* $fz \in \theta z$ *для любой точки* $z \in Z$ *и* $f^{-1} U \in \mathscr{B}^*(Z, S)$ *для любого открытого в* X *множества* U.

Доказательство вытекает из теоремы 3 и из того, что всякое открытое множество является F_σ-множеством.

Метрическое пространство X называется A-пространством, если X является A-множеством некоторого полного сепарабельного метрического пространства.

Следствие 2. *Пусть* f: $X \to Y$ — *такое однозначное отображение сепарабельного метрического пространства* X *на* A-*пространство* Y, *что для любой точки* $y \in Y$ *множество* $f^{-1} y$ *полно относительно метрики* ρ (*в частности, бикомпактно*). *Если для всякого открытого* (*либо замкнутого*) *в* X *множества* L *имеем* $fL \in C\mathscr{A}(Y)$, *то существует такое* A-*пространство* $X_1 \subseteq X$, *что* $fX_1 = Y$ *и* $f_1 = f \mid X$ *является* $\mathscr{B}$-*гомеоморфизмом* *.

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 3 (либо следствия 1) и теоремы Суслина — Лузина (см. ([2]), стр. 500, теорема 3).

Если (Z, S) — пространство и X — топологическое пространство, то $S_X = \{L \times H \mid L \in S$ и H — нуль-множество в $X\}$. Положим $(Z \times X, S) = (Z \times X, S_X)$ и $P_z = \{x\} \times X$ для всякой точки $z \in Z$. Если $L \subseteq Z \times X$, то множество $L^{(X)} = \cup \{[P_z \cap L]_{F_Z} \mid z \in Z\}$ называется X-замыканием множества L. Если X — пространство со счетной базой, то X-замыкание любого A-множества пространства $(Z \times X, S)$ является A-множеством. В дальнейшем через X обозначим некоторое полное сепарабельное метризуемое пространство. Пусть π: $Z \times X \to Z$ — проекция $Z \times X$ на Z. Без труда доказывается, что из $L \in \mathscr{A}(Z \times X, S)$ вытекает $\pi L \in \mathscr{A}(Z, S)$.

* Отображение f: $X \to Y$ пространства (X, S_1) в (Y, S_2) является B-отображением, если $f^{-1} L \in B(X, S_1)$ для всякого $L \in S_2$. Взаимно однозначное отображение f: $X \to Y$ называется B-гомеоморфизмом, если f и f^{-1} являются B-отображениями. Аналогичным образом определяются B^*-отображения и B^*-гомеоморфизмы.

Теорема 4. *Пусть* $L \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$.

Тогда множество $H = \{z \in Z \mid P_z \cap L$ *есть компакт*$\} \in C\mathscr{A}(Z, S)$.

Доказательство. Пусть bX — метризуемое бикомпактное расширение X. Поскольку X является G_δ-множеством в bX, то $L \in \mathscr{B}^*(Z \times bX, S)$. Очевидно, что $H = \{z \in Z \mid P_z \cap L$ замкнуто в $P_z\} = Z \setminus \pi(L^{(bX)} \setminus L)$. Следовательно, $H \in C\mathscr{A}(Z, S)$. Теорема доказана.

Пусть $L \subset Z \times X$. Множество L CA-нормально, если: а) $L \in C\mathscr{A}(Z \times X, S)$; б) L X-компактно, т. е. $L \cup P_z$-компактно для любой точки $z \in Z$; в) если F замкнуто в X, то $\pi(L \cap (Z \times F)) \in C\mathscr{A}(Z, S)$. Объединение конечного числа нормальных CA-множеств CA-нормально. Легко доказывается

Лемма 1. *Пусть* $\{E_n \mid n = 1, 2\}$ — *последовательность* CA-*нормальных множеств.*

Тогда множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ CA-*нормально. Если* $E_{n+1} \subseteq E_n$, то $\pi(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \pi(E_n)$.

Обозначим через J пространство Бэра, а через $\delta_{n_1 n_2 \ldots n_k}$ — интервалы Бэра (см. ([7])). Множество $L \subseteq Z \times X \times J$ S-элементарно, если существуют такие $L_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \in Sx$, что $L = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} (\bigcup \{L_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times H_{n_1 n_2 \ldots n_k} \times \delta_{n_1 n_2 \ldots n_k} \mid n_i = 1, 2, \ldots; i \leqslant k\})$. Пусть p: $Z \times X \times J \to Z \times X$ — естественная проекция. Тогда для всякого $E \in \mathscr{A}(Z \times X, S)$ существует такое S-элементарное множество $L \subseteq Z \times X \times J$, что $pL = E$. Если $E \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$, то существует такое S-элементарное множество L, что $pL = E$ и $p|L$ взаимно однозначно. Если L S-элементарно, то $L \in \mathscr{B}(Z \times X \times J, S)$ и для любых $z \in Z$ и $x \in X$ множества $P_z' \cap L$ и $P_{(z,x)} \cap L$ замкнуты соответственно в $P_z' = \{z\} \times X \times J$ и $P_{(z,x)} = \{(z, x)\} \times J$.

Теорема 5. *Пусть* $L \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$ *и* $H = \{z \in \pi L \mid P_z \cap L$ σ-*компактно*$\}$. *Тогда существует такая последовательность* $C\mathscr{A}$-*нормальных множеств* $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, *что* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq L$ *и* $H \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \pi E_n$.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что X — метризуемый бикомпакт. Обозначим через $\omega_j = \{V_i^j \mid i = 1, \ldots, n(j)\}$ некоторое открытое покрытие пространства X из множеств диаметра $1/n$ относительно метрики ρ на X. Все интервалы Бэра пространства J занумеруем некоторым порядком $\{U_m \mid m = 1, 2, \ldots\}$.

Так как $L \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$, то существует такое S-элементарное множество $\Phi \in \mathscr{B}(Z \times X \times J, S)$, что $p\Phi = L$. Положим $L_{mnk} = p((Z \times [V_n^k] \times U_m) \cap \Phi)$. Ясно, что $L = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{n=1}^{n(k)} L_{mnk}$ и L_{mnk} суть A-множества. Для каждого j положим $L_{mnk}^{ji} = (\pi(L_{mnk} \cap (Z \times [V_i^j])) \times [V_i^j]$, $L_{mnk}^j = \bigcup\limits_{i=1}^{n(j)} L_{mnk}^{ji}$ и $\widetilde{L}_{mnk} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} L_{mnk}^j$. Все L_{mnk}^{ji}, $\widetilde{L}_{mnk}^j$ и $\widetilde{L}_{mnk}$ суть A-множества и $\widetilde{L}_{mnk} = L_{mnk}^{(X)}$. В силу теоремы 2, существуют такие CA-множества H_{mnk}^j, что $H_{mnk}^j \supseteq L_{mnk}^j \setminus \widetilde{L}_{mnk}$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} H_{mnk}^j = \phi$. Пусть $E_{mnk}^{ji} = (Z \setminus \pi((Z \times [V_i^j]) \setminus (H_{mnk}^j \cup L)) \times [V_i^j])$. Тогда E_{mnk}^{ji} есть CA-нормальное множество. Множества $E_{mnk}^j = \bigcup\limits_{i=1}^{n(j)} E_{mnk}^{ji}$ и $E_{mnk} = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_{mnk}^j$ также CA-нормальны. По построению, $E_{mnk}^j \subseteq H_{mnk}^j \cup L$. Поэтому $E_{mnk} \subseteq \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} (H_{mnk}^j \cup L) = L$. Таким образом, $\bigcup \{E_{mnk} \mid m, n, k = 1, 2, \ldots\} \subseteq L$.

Покажем, что $H \subseteq \bigcup \{\pi E_{mnk} \mid m, n, k = 1, 2, \ldots\}$. Во-первых, легко заметить, что πE_{mnk} содержит все точки $z \in \pi L_{mnk}$, для которых $P_z \cap \tilde{L}_{mnk} \subseteq L$. Пусть $z \in H$. Тогда $L_z = P_z \cap L = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, где множества $F_1, F_2, \ldots$ компактны. Пусть $\Phi_z = \Phi \cap (\{z\} \times X \times Y)$ и $f = p|\Phi_z$. Тогда отображение $f\colon \Phi_z \to L_Z$ непрерывно. Поскольку пространство Φ_Z полно, то в силу теоремы Бэра ([2], стр. 425), существует такое число i_0, для которого $\operatorname{Int} f^{-1}F_{i_0} = \phi$. Поэтому найдутся такие m_0, n_0, k_0, для которых $(Z \times [V_{n_0}^{k_0}] \times U_{m_0}) \cap \Phi_Z \subseteq f^{-1}F_{i_0}$. Следовательно, $P_Z \cap \tilde{L}_{m_0n_0k_0} = [P_z \cap L_{m_0n_0k_0}] \subseteq F_{i_0} \subseteq L$. Теорема доказана.

Лемма 2. *Пусть $f\colon Z \to Y$ — некоторое B^*-отображение пространства $(Z, \bar{S})$ в метрическое пространство Y со счетной базой.*

Тогда $\{(z, fz) \,|\, z \in Z\} \in \mathscr{B}^*(Z \times Y, S)$.

Доказательство. Пусть $\{U_n | n = 1, 2, \ldots\}$ — некоторая счетная база в Y. Тогда $\{(z, fz) \,|\, z \in Z\} = Z \times Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} ((Z \setminus f^{-1}U_n) \times U_n)$.

Лемма 3. *Пусть L — CA-нормальное множество в $(Z \times Y, S)$, где Y — метрическое пространство со счетной базой. Если $\pi L \in \mathscr{B}^*(Z, S)$, то существует такое множество $H \in \mathscr{B}^*(Z \times Y, S)$, что $H \subseteq L$, $\pi L = \pi H$ и $\pi|H$ взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть $\tilde{Y}$ — компактное расширение пространства Y. Положим $\theta\colon Z_1 \to F(\tilde{Y})$, где $Z_1 = \pi L$ и θz есть проекция на Y множества $P_Z \cap L$. Поскольку L CA-нормально, то $\theta^{-1}F \in C\mathscr{A}(Z, S)$, как только F замкнуто в $\tilde{Y}$. Тогда существует такое B^*-отображение $f\colon Z_1 \to Y$, что $fz \in \theta z$. Множество $H = \{(z, fz) \,|\, z \in Z_1\}$ искомо.

Теорема 6. *Пусть $L \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$ и для каждой точки $z \in Z$ множество $P_Z \cap L$ σ-компактно.*

Тогда $\pi L \in \mathscr{B}^*(Z, S)$ и существует такое $H \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$, что $H \subseteq L$, $\pi H = \pi L$ и $\pi|H$ взаимно однозначно.

Доказательство. В силу теоремы 5, найдутся такие CA-нормальные множества $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq L$ и $\pi L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi E_n$. Поскольку $\pi L \in A(Z, S)$, $\{\pi E_n | n = 1, 2, \ldots\} \subseteq C\mathscr{A}(Z, S)$ и $\pi L = \bigcup_{n=1}^{\infty} \pi E_n$, то $\pi L \in \mathscr{B}^*(Z, S)$. По теореме 2, существуют такие попарно непересекающиеся B^*-множества $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \ldots$, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \pi L$ и $\Phi_n \subseteq \pi E_n$. Положим $M_n = E_n \cap (\Phi_n \times X)$. Множества $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ CA-нормальны и $\pi M_n = \Phi_n$. По лемме 3, для любого числа n существует такое множество $H_n \in \mathscr{B}^*(Z \times X, S)$, что $H_n \subseteq M_n$, $\pi H_n = \Phi_n$ и $\pi|H_n$ взаимно однозначно. Множество $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ искомо. Теорема доказана.

Из теоремы 6 вытекает ряд известных теорем об униформизации плоских B-множеств ([1], [4], [6]). В классическом случае попытку доказать теорему 6 сделал Е. А. Щегольков ([6]), но его лемма (см. ([1]), стр. 10), на которой основывается доказательство, неверна. Контрпримером к лемме Е. А. Щеголькова служит любое униформное не борелевское CA-множество, проекция которого есть B-множество. Такие множества являются элементарными CA-множествами ([1]) и существуют в силу теоремы Кондо ([5]).

Тираспольский государственный педагогический институт

Поступило 24 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Я. Арсенин, А. А. Ляпунов, УМН, в. 5, 45 (1950). [2] К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966. [3] K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, Bull. Acad. Polon. Sci., ser. math., 8, № 11—12, 397 (1960). [4] П. С. Новиков, Fund. Math., 17, 8 (1931). [5] M. Kondô, Proc. Imp. Acad. Tohoku, 13, 287 (1937). [6] Е. А. Щегольков, ДАН, 59, № 6, 1065 (1943). [7] Е. А. Щегольков, УМН, 5, в. 5, 14 (1950).