

В. В. КАТРАХОВ

О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком И. Н. Векун 27 III 1972)

В этой заметке рассматривается задача на собственные значения для сингулярных эллиптических операторов произвольного порядка с переменными коэффициентами. Операторы аналогичного типа изучались в работе ⁽¹⁾.

Рассмотрим в евклидовом пространстве R^n ограниченную область Ω с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через $\{V_\nu\}$ покрытие $\bar{\Omega}$ конечной системой областей $V_0, V_1, \dots, V_N$ в R^n таких, что $V_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$, и таких, что в каждой $V_\nu, \nu > 0$, определено бесконечно гладкое преобразование координат $x \rightarrow y = y^{(\nu)}$ с положительным якобианом, при котором $\partial\Omega$ локально переходит в гиперплоскость $y_n = 0$, а прилегающая к $\partial\Omega$ часть области — в $y_n > 0$. Кроме того, предполагается, что при этих преобразованиях координат нормали к $\partial\Omega$ переходят в нормали к $y_n = 0$.

Лемма 1. *Существует разбиение единицы $\{h_\nu\}$ в области Ω , подчиненное покрытию $\{V_\nu\}$, такое, что в каждой локальной координате $y^{(\nu)}$, $\nu > 0$,*

$$\frac{\partial}{\partial y_n} h_\nu(y) = 0$$

в некоторой окрестности $y_n = 0$.

Обозначим через $C_r^k(\Omega)$ множество k раз непрерывно дифференцируемых функций, четных по y_n в каждой локальной системе координат $y^{(\nu)}$, $C_r^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_r^k(\Omega)$. Введем пространство $H_r^l(\Omega)$ как замыкание $C_r^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{H_r^l(\Omega)}^2 = \|h_0 u\|_{H^l(V_0)}^2 + \sum_{\nu=1}^N \|h_\nu u\|_{H^l(R_+^n)}^2,$$

где норма $\|h_\nu u\|_{H^l}$ вычисляется в локальных координатах $y^{(\nu)}$ как норма функции, определенной в соответствующем полупространстве (определение $H^l(R_+^n)$ см. в ⁽²⁾), а $\|h_0 u\|_{H^l}$ — обычная норма в пространстве С. Л. Соболева.

Имеет место

Теорема 1. *Пространство $H_r^l(\Omega)$ при $l \geq \left[\frac{n}{2}\right] + \gamma + k + 1$ в алгебраическом и топологическом смысле вложено в пространство $C_r^k(\Omega)$.*

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. $\bigcap_{l \geq 0} H_r^l(\Omega) \subset C_r^\infty(\bar{\Omega})$ (вложение понимается также и в топологическом смысле).

Пусть внутри области Ω дифференциальный оператор L имеет вид

$$L(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad (1)$$

где коэффициенты a_α — достаточно гладкие функции. Около границы $\partial\Omega$ области Ω оператор L определим следующим образом.

Пусть для каждого $\nu > 0$ оператор L в локальных координатах имеет вид

$$\tilde{L}_\nu = \sum_{\substack{|\alpha'| + 2\alpha_n + k \leq 2m \\ k \leq 1}} \tilde{a}_{\alpha k}(y) D_{y'}^{\alpha'} D_{y_n}^k B_{y_n}^{\alpha_n}, \quad (2)$$

где $y = (y', y_n) = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$, $\alpha = (\alpha', \alpha_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $|\alpha'| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}$,

$$D_{y'}^{\alpha'} = \frac{\partial^{|\alpha'|}}{\partial y_1^{\alpha_1} \dots \partial y_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}, \quad B_{y_n} = \frac{\partial^2}{\partial y_n^2} + \frac{2\gamma}{y_n} \frac{\partial}{\partial y_n}, \quad \gamma > 0.$$

Кроме того предполагается, что $\tilde{a}_{\alpha k}$ — достаточно гладкие функции в $\bar{R}_+^n \cap \bar{V}_\nu$, где $\bar{V}_\nu$ — образ множества V_ν при преобразовании координат $x \rightarrow y^{(\nu)}$ и $\tilde{a}_{\alpha k} = 0$ при $|\alpha'| + 2\alpha_n = 2m - 1$, $k = 1$.

Пусть в любой точке $x \in \Omega$ оператор L эллиптичен, т. е.

$$\sum_{|\alpha| = 2m} a_\alpha(x) \xi^\alpha \neq 0, \quad \xi \in R^n, \quad \xi \neq 0, \quad (3)$$

а $\tilde{L}_\nu$ при $\nu > 0$ удовлетворяет условию

$$\sum_{|\alpha'| + 2\alpha_n = 2m} \tilde{a}_{\alpha 0}(y) \xi'^{\alpha'} \xi_n^{2\alpha_n} \neq 0 \quad (4)$$

при $y \in \bar{R}_+^n \cap \bar{V}_\nu$, $0 \neq \xi \in R^n$.

При условии, что коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям работы (1), справедлива следующая

Теорема 2. Для $u \in H_\gamma^s(\Omega)$ выполняется неравенство

$$\|u\|_{H_\gamma^s(\Omega)} \leq c (\|Lu\|_{H_\gamma^{s-2m}(\Omega)} + \|u\|_{H_\gamma^0(\Omega)}).$$

Оператор L нётеров, как оператор из H_γ^s в H_γ^{s-2m} для целых $s \geq 2m$.

Отсюда вытекают следствия.

Следствие 2. Ядро и коядро оператора L состоят из гладких функций, т. е. $\text{Ker } L, \text{Coker } L \subset C_r^\infty(\Omega)$.

Следствие 3. Существуют константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что для целых $s \geq 0$ выполняется неравенство

$$c_1 \|u\|_{H_\gamma^{s+2m}} \leq \|Lu\|_{H_\gamma^s} \leq c_2 \|u\|_{H_\gamma^{s+2m}}$$

для $u \in H_\gamma^{s+2m}(\Omega) \ominus \text{Ker } L$ ($\ominus$ обозначает ортогональное вычитание в $H_\gamma^0(\Omega)$).

Пусть $\rho(x) \geq 0$ ($\rho(x) > 0$ при $x \in \Omega$) — достаточно гладкая в Ω функция и пусть $\rho(x)$ переходит в $y_n^{2\gamma}$ при преобразовании координат $x \rightarrow y^{(\nu)}$, $\nu > 0$. Тогда пространство $L_{\rho^2}(\Omega) = L_{\rho^2}$ квадратично суммируемых с весом $\rho(x)$ функций в Ω с естественным скалярным произведением алгебраически и топологически изоморфно пространству $H_\gamma^0(\Omega)$.

Далее будет предполагаться, что L — симметрический оператор, т. е. для любых $u, v \in D(L) = C_r^\infty(\Omega)$

$$(u, Lv)_{L_\rho^2} = (Lu, v)_{L_\rho^2}. \quad (5)$$

С помощью следствий 2 и 3 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть L удовлетворяет условиям (3) — (5) и условиям теоремы 2. Если для некоторой функции $f \in H_\gamma^0(\Omega)$ и для любой функции $u \in D(L)$ выполняется неравенство

$$|(f, Lu)_{L_\rho^2}| \leq c \|u\|_{H_\gamma^{-s}(\Omega)}, \quad s \geq 0,$$

с постоянной c , не зависящей от u , то $f \in H_\gamma^{s+2m}(\Omega)$.

Норма в $H_Y^{-s}(\Omega)$ определяется по формуле

$$\|u\|_{H_Y^{-s}} = \sup_{\varphi \in C_r^\infty(\bar{\Omega})} \frac{|(u, \varphi)_{L_p^2}|}{\|\varphi\|_{H_Y^s}}.$$

Пусть оператор L такой, как и в теореме 3. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda u. \quad (6)$$

Предположим, что L — полуограниченный снизу оператор, т. е. удовлетворяет условию (5) и существует постоянная $c > 0$ такая, что $((L + c)u, u)_{L_p^2} \geq 0$ для всех $u \in D(L)$.

Одно из достаточных условий полуограниченности дифференциального оператора дается следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть коэффициенты симметрической формы

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^\alpha f D^\beta f \quad (7)$$

вещественные, достаточно гладкие внутри области Ω функции, и пусть

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x) \xi^\alpha \xi^\beta > 0$$

при $x \in \Omega$, $\xi \in R^n$, $\xi \neq 0$.

Пусть форма (7) вблизи границы в локальных координатах имеет вид

$$\sum_{\substack{|\alpha'|+2\alpha_n \leq m \\ |\beta'|+2\beta_n \leq m}} \tilde{a}_{\alpha\beta}(y) D_{y'}^{\alpha'} B_{y_n}^{\alpha_n} f(y) \cdot D_{y'}^{\beta'} B_{y_n}^{\beta_n} f(y),$$

и пусть

$$\sum_{|\alpha'|+2\alpha_n=|\beta'|+2\beta_n=m} \tilde{a}_{\alpha\beta}(y) \xi^{\alpha'} \xi_n^{2\alpha_n} \xi^{\beta'} \xi_n^{2\beta_n} > 0$$

при $y \in \bar{R}_+^n \cap V_\nu$, $0 \neq \xi \in R^n$.

Тогда справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} \rho(x) \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha\beta} D^\alpha f(x) D^\beta \bar{f}(x) dx \geq c_1 \|f\|_{H_Y^m}^2 - c_2 \|f\|_{H_Y^0}^2 \quad (8)$$

при $f \in C_r^\infty(\Omega)$.

Отметим, что впервые неравенство Гординга для сингулярных форм получено в (5). Интегрируя по частям слева в неравенстве (8), мы сможем выделить полуограниченный снизу дифференциальный оператор.

Лемма 2. Пусть L — полуограниченный снизу оператор, тогда замыкание графика L в $L_p^2 \times L_p^2$ определяет замкнутый симметрический оператор A с областью определения $D(A)$, плотной в L_p^2 .

Регулярность функций из области определения степеней сопряженного к A в смысле L_p^2 оператора A^* характеризует следующая

Теорема 5. Если $u \in D[(A^*)^k]$, то $u \in H_Y^{2mk}(\Omega)$.

Следствие 4. Если $u \in F = \bigcap_{k \geq 0} D[(A^*)^k]$, то $u \in C_r^\infty(\bar{\Omega})$.

Следствие 5. Оператор A самосопряжен, т. е. $A = A^*$.

Пусть a — точная нижняя грань спектра оператора A . Тогда на интервале $[a, \infty)$ существует спектральное семейство проекторов E_λ таких, что

$$A = \int_a^\infty \lambda dE_\lambda.$$

Теорема 6. *Проектор E_λ является интегральным оператором с ядром $e_{\lambda, x} \in F$, т. е. для любого $x \in \bar{\Omega}$ и каждой функции $f \in L_p^2$ выполняется равенство*

$$(E_\lambda f)(x) = (e_{\lambda, x}, f)_{L_p^2},$$

кроме того $e_{\lambda, x}(y) = \overline{e_{\lambda, y}(x)}$ для $x, y \in \Omega$.

Обозначим через $F_p, p \geq 0$, целое, гильбертово пространство элементов из $D(A^p)$ с нормой

$$\|f\|_p^2 = \|f\|_{L_p^2}^2 + \|A^p f\|_{L_p^2}^2.$$

Через F_{-p} обозначим негативное к F_p пространство, построенное по пространствам L_p^2 и F_p (обычную теорию негативных пространств см. в ⁽⁶⁾).

Справедлива следующая

Теорема 7. *Для каждого $x \in \bar{\Omega}$ существует элемент $g_{\lambda, x}^{(p)} \in F_{-q}$, где $q = [n/2] + \gamma + 1 - p$, такой, что при $f \in F_q$ функция $(g_{\lambda, x}^{(p)}, f)_{L_p^2}$ непрерывна по $x \in \Omega$ и*

$$(A + \lambda)^{-p} f(x) = (g_{\lambda, x}^{(p)}, f)_{L_p^2}.$$

Следствие 6. *Для $f \in F_q$ имеет место равенство*

$$(g_{\lambda, x}^{(p)}, f)_{L_p^2} = \int_a^\infty (u + \lambda)^{-p} d_u (e_{u, x}, f)_{L_p^2}.$$

Доказательство теорем 6 и 7 проводится методами работ ⁽³⁾ и ⁽⁴⁾ с использованием предыдущих результатов. Так же как в упомянутых работах, можно доказать полноту обобщенных собственных функций оператора A .

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
28 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. А. Киприянов, ДАН, 195, № 1 (1970). ² И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 89 (1967). ³ J. Odnoff, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem., 14 (1959). ⁴ J. Ercolano, M. Schechter, Comm. Pure and Appl. Math., 18 (1965). ⁵ И. А. Киприянов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 105 (1969). ⁶ Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.