

В. Ф. ДЕМЬЯНОВ, А. Б. ПЕВНЫЙ

ПЕРВЫЕ И ВТОРЫЕ МАРГИНАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 IV 1972)

1°. Пусть

$$\varphi(t) = \max_{x \in \Omega(t)} f(x, t), \quad (1)$$

где $\Omega(t)$ — замкнутые множества из E_n , зависящие от параметра $t \in [0, t_1]$.

Задача (1) есть параметрическая задача математического программирования. Производная $\varphi'(0)$, если она существует, называется первым маргинальным значением задачи (1).

Пусть точка $x \in \Omega(0)$. Введем множество

$$\gamma(x) = \{v \in E_n \mid \exists t_0 > 0: x + tv \in \Omega(t) \text{ при } 0 < t < t_0\}.$$

Замыкание $\gamma(x)$ обозначим $\Gamma(x)$ и назовем множеством допустимых направлений в точке x . В случае, когда $\Omega(t)$ не зависит от t , $\Gamma(x)$ есть обычный конус допустимых направлений ⁽¹⁾. В общем случае $\Gamma(x)$ не является конусом и может оказаться пустым.

Будем говорить, что точечно-множественное отображение $\Omega(t)$ допускает аппроксимацию первого порядка при $t = 0$, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}$ такой, что $x_k \in \Omega(t_k)$, $t_k \rightarrow +0$, $x_k \rightarrow \bar{x}$, справедливо представление

$$x_k = \bar{x} + t_k v_k + o(t_k); \quad (2)$$

причем

$$\bar{x} \in \Omega(0), \quad v_k \in \Gamma(\bar{x}), \quad t_k v_k \rightarrow 0. \quad (3)$$

Можно показать, что если $\Omega(t)$ имеет вид

$$\Omega(t) = \{x \in E_n \mid h_i(x, t) \leq 0, \quad i = 1, \dots, N\}, \quad (4)$$

где функции $h_i(x, t)$ непрерывно дифференцируемы по x, t и при $t = 0$ выпуклы по x и удовлетворяют условию Слейтера (существует x_0 такое, что $h_i(x_0, 0) < 0$, $i = 1, \dots, N$), то отображение $\Omega(t)$ допускает аппроксимацию первого порядка при $t = 0$.

Мы будем рассматривать лишь такие задачи (1), в которых отображение $\Omega(t)$ непрерывно при $t = 0$ (см. ⁽²⁾), множества $\Omega(t)$, $t \in [0, t_1]$, ограничены в совокупности, а функция $f(x, t)$ непрерывна по x, t . Для таких задач функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t = 0$.

Введем множество

$$R(0) = \{x \in \Omega(0) \mid \varphi(0) = f(x, 0)\}.$$

Предположим теперь, что для любой последовательности вида (2), (3), где $\bar{x} \in R(0)$, будет

$$f(x_k, t_k) - f(\bar{x}, 0) \leq t_k [f_x(\bar{x}, 0), v_k] + f_t(\bar{x}, 0) + o(t_k).$$

Это условие выполняется, например, если функция $f(x, 0)$ вогнута по x в окрестности точки $\bar{x}$.

Теорема 1. При сделанных предположениях существует первое маргинальное значение для задачи (1), причем

$$\varphi'(0) = \sup_{x \in R(0)} \sup_{v \in \Gamma(x)} [(f_x(x, 0), v) + f_l(x, 0)]. \quad (5)$$

З а м е ч а н и е. Если $\Omega(t)$ не зависит от t , то (5) превращается в обычную формулу для производной функции максимума (см., например, (3, 4)).

2°. Пусть первое маргинальное значение $\varphi'(0)$ для задачи (1) существует и конечно. Предел

$$\varphi''(0) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2}{t^2} [\varphi(t) - \varphi(0) - \varphi'(0)t], \quad (6)$$

если он существует, будем называть вторым маргинальным значением для задачи (1). Если $|\varphi''(0)| < \infty$, то

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}t^2\varphi''(0) + o(t^2).$$

Задача о существовании и нахождении $\varphi''(0)$ почти не исследована даже для случая, когда $\Omega(t)$ не зависит от t . Один лишь частный случай рассмотрен в (5).

Фиксируем $x \in \Omega(0)$ и $v \in \Gamma(x)$ и введем множество

$$\gamma^2(x, v) = \{w \mid \exists t_0 > 0: x + tv + t^2w \in \Omega(t) \text{ при } 0 < t < t_0\}.$$

Замыкание $\gamma^2(x, v)$ обозначим через $\Gamma^2(x, v)$ и назовем множеством допустимых направлений второго порядка.

Будем говорить, что отображение $\Omega(t)$ допускает аппроксимацию второго порядка при $t = 0$, если оно допускает аппроксимацию первого порядка и для любой последовательности $\{x_k\}$, $x_k \in \Omega(t_k)$, $x_k = \bar{x} + t_k\bar{v} + o(t_k)$, $\bar{v} \in \Gamma(\bar{x})$, имеем

$$x_k = \bar{x} + t_k\bar{v} + t_k^2w_k + o(t_k^2), \quad w_k \in \Gamma^2(\bar{x}, \bar{v}). \quad (7)$$

Можно показать, что если $\Omega(t)$ имеет вид (4), причем функции $h_i(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемы, при $t = 0$ выпуклы по x и удовлетворяют условию Слейтера, то отображение $\Omega(t)$ допускает аппроксимацию второго порядка при $t = 0$.

Обозначим через T множество пар $[x, v]$, на которых достигается супремум в (5):

$$T = \{[x, v] \mid x \in R(0), \quad v \in \Gamma(x), \quad \varphi'(0) = (f_x(x, 0), v) + f_l(x, 0)\},$$

и предположим, что T не пусто (если $\Omega(t)$ задано в виде (4), то это можно доказать).

Теорема 2. Пусть функция $f(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, t , отображение $\Omega(t)$ допускает аппроксимацию второго порядка при $t = 0$ и для любого $\bar{x} \in R(0)$ матрица $f_{xx}(\bar{x}, 0)$ отрицательно определена.

Тогда существует $\varphi''(0)$ и

$$\varphi''(0) = \sup_{[x, v] \in T} \sup_{w \in \Gamma^2(x, v)} [2(f_x, w) + (f_{xx}v, v) + 2(f_{xt}, v) + f_{ll}], \quad (8)$$

где все производные берутся в точках $[x, 0]$.

З а м е ч а н и я. 1) Может оказаться, что для некоторых $[x, v] \in T$ множество $\Gamma^2(x, v)$ пусто. В таком случае считаем, что супремум по пустому множеству равен $-\infty$. При доказательстве теоремы 2 показывается, что существует пара $[\bar{x}, \bar{v}] \in T$, для которой $\Gamma^2(\bar{x}, \bar{v}) \neq \emptyset$.

2) Если $\Omega(t) \equiv \Omega$ не зависит от t , то T имеет вид

$$T = \{[x, v] | x \in R(0), \varphi'(0) = f_t(x, 0), v \in \Gamma(x), (f_x(x, 0), v) = 0\},$$

где $\Gamma(x)$ — обычный конус допустимых направлений для Ω .

3) Если $\Omega(t) \equiv \Omega$ задано линейными неравенствами, то $\Gamma^2(x, v)$ совпадает с $\Gamma(x)$ и формула (8) принимает вид

$$\varphi''(0) = \sup_{[x, v] \in T} [(f_{xx}v, v) + 2(f_{xt}, v) + f_{tt}]. \quad (9)$$

Формула (9) была получена в (5).

4) Полученные выше результаты могут быть применены для решения задачи минимизации функции вида

$$\varphi(y) = \max_{x \in \Omega_1^*(y)} f(x, y)$$

на множестве $G \subset E_m$. По формулам (5) и (8) можно находить производные функции $\varphi(y)$ по направлениям и с их помощью строить методы последовательных приближений. Первые производные $\varphi(y)$ по направлениям рассматривались также в (6-8). Во всех этих работах предполагалось, что $f(x, y)$ вогнута по x .

3°. Пусть

$$\varphi(t) = \max_{x \in \Omega_1(t)} \min_{y \in \Omega_2(t)} f(x, y, t), \quad (10)$$

где множества $\Omega_1(t) \subset E_n$, $\Omega_2(t) \subset E_m$ удовлетворяют тем же предположениям, что и множество $\Omega(t)$ в п. 1°, а также допускают аппроксимацию первого порядка при $t = 0$. Задача (10) есть параметрическая минимаксная задача. Число $\varphi'(0)$, если оно существует, называется первым маргинальным значением задачи (10) при $t = 0$.

Введем обозначения:

$$R = \{x \in \Omega_1(0) | \varphi(0) = \Phi(x, 0) = \min_{y \in \Omega_2(0)} f(x, y, 0)\},$$

$$S(x) = \{y \in \Omega_2(0) | \Phi(x, 0) = f(x, y, 0)\}.$$

Предположим следующее:

1) функция $f(x, y, t)$ непрерывно дифференцируема по x, y, t и для любого $\bar{x} \in R$ существует $r > 0$ такое, что

$$f(x, y, 0) - f(\bar{x}, y, 0) \leq (f_x(\bar{x}, y, 0), x - \bar{x}) \quad (11)$$

при $\|x - \bar{x}\| < r$, $y \in S(\bar{x})$. (11) выполнено, если $f(x, y, 0)$ вогнута по x в окрестности точки $\bar{x}$;

2) для любого $\bar{x} \in R$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{v \in \Gamma_1(\bar{x})} \inf_{y \in S(\bar{x})} \inf_{w \in \Gamma_2(y, \varepsilon, K)} [(f_x, v) + (f_y, w) + f_t] = \\ = \sup_{v \in \Gamma_1(\bar{x})} \inf_{y \in S(\bar{x})} \inf_{w \in \Gamma_2(y)} [(f_x, v) + (f_y, w) + f_t], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\Gamma_1(\bar{x})$ и $\Gamma_2(y)$ — множества допустимых направлений,

$$\Gamma_2(y, \varepsilon, K) = \{w | \|w\| \leq K, y + tw \in \Omega_2(t) \text{ при } 0 < t < \varepsilon\},$$

а все производные берутся в точках $[\bar{x}, y, 0]$. (12) выполнено, например, если $\Omega_2(t)$ задано в виде (4), а $S(\bar{x})$ состоит из конечного числа точек. (12) также выполнено, если $\Omega_2(t)$ — произвольный выпуклый компакт, не зависящий от t .

Теорема 3. При сделанных предположениях существует $\varphi'(0)$ и

$$\varphi'(0) = \sup_{x \in R} \sup_{v \in \Gamma_1(x)} \inf_{y \in S(x)} \inf_{w \in \Gamma_2(y)} [(f_x, v) + (f_y, w) + f_t].$$

З а м е ч а н и я. 1. Аналогично можно получить условия, при которых для функции вида

$$\varphi(t) = \max_{x_1 \in \Omega_1(t)} \min_{x_2 \in \Omega_2(t)} \dots \max_{x_{n-1} \in \Omega_{n-1}(t)} \min_{x_n \in \Omega_n(t)} f(x_1, \dots, x_n, t)$$

существует $\varphi'(0)$ и справедлива формула

$$\varphi'(0) = \sup_{x_1 \in R_1} \sup_{v_1 \in \Gamma_1(x_1)} \inf_{x_2 \in R_2} \inf_{v_2 \in \Gamma_2(x_2)} \dots \inf_{x_n \in R_n} \inf_{v_n \in \Gamma_n(x_n)} D,$$

где

$$D = \sum_{i=1}^n (f_{x_i}, v_i) + f_t, \quad R_i = R_i(x_1, \dots, x_{n-1}) - \text{множество } x_i \in \Omega_i(0), \text{ на}$$

которых достигается экстремум по x_i при $t=0$, а $\Gamma_i(x_i)$ — множество допустимых направлений для $\Omega_i(t)$, $i=1, \dots, n$.

2. Теорема 1 была сформулирована в предположении, что выполнено неравенство, приведенное перед теоремой 1. Вместо этого достаточно предположить, что если $x_k \rightarrow \bar{x}$, $x_k \in R(t_k)$, то в (2) последовательность $\{v_k\}$ ограничена. Это, например, так, если $\Omega(t)$ задано формулой (4) и

$$(f_x(\bar{x}, 0), v) \leq -a\|v\|, \quad a > 0,$$

для всех v из конуса возможных направлений множества $\Omega(0)$ в точке $\bar{x}$.

Аналогичное замечание имеет место и для теоремы 3.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 5, № 3 (1965). ² С. Карлин, Математические методы в теории игр, программировании и экономике, М., 1964. ³ В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов, УМН, 26, № 3 (1971). ⁴ Б. Н. Пшеничный, Необходимые условия экстремума, «Наука», 1969. ⁵ В. Ф. Демьянов, ДАН, 187, № 2 (1969). ⁶ Е. Г. Гольштейн, Выпуклое программирование (элементы теории), «Наука», 1970. ⁷ А. И. Сотсков, ДАН, 189, № 2 (1969). ⁸ W. W. Hogan, Directional Derivatives for Extremal Values Functions, West. Manag. Sc. Inst., Working Paper № 177, Los Angeles, 1971.