

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР Э. И. ГРИГОЛЮК, Б. Л. ПЕЛЕХ

СТАТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ И КОМПЛЕКСНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЛЕГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Разрешающие уравнения существующих в настоящее время теорий трехслойных оболочек с легким заполнителем представлены в виде уравнений в обобщенных смещениях ^(1, 2).

В данной работе на базе обобщения статико-геометрической аналогии на теорию трехслойных оболочек с легким заполнителем распространяется комплексный метод В. В. Новожилова.

Основные уравнения теории симметрично-собранных трехслойных оболочек с легким заполнителем, воспринимающим лишь поперечный сдвиг, в случае, когда изгибной жесткостью несущих слоев можно пренебречь, запишутся в следующем виде ^(1, 2):

а) Уравнения равновесия:

$$\begin{aligned} \nabla_i T^{ij} - b_i^j N^i + q^j &= 0, \\ \nabla_i N^i + b_{ij} T^{ij} + q &= 0, \quad \nabla_i M^{ij} - N^j + m^j = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где T^{ij} , M^{ij} , N^i — компоненты тензоров суммарных тангенциальных сил, моментов и вектора поперечных сил трехслойной оболочки; q^j , q , m^j — компоненты заданных векторов внешних сил и моментов; ∇_i — символ ковариантного дифференцирования; a_{ij} , b_{ij} — тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности.

б) Соотношения упругости:

$$T^{ij} = BE^{ijkl}\epsilon_{kl}, \quad M^{ij} = CE^{ijkl}\kappa_{kl}, \quad N^i = \Lambda\epsilon^{i3}, \quad (2)$$

здесь $E^{ijkl} = a^{ik}a^{jl} + \mu c^{ik}c^{jl}$, c^{ij} — компоненты дискриминантного тензора; жесткостные параметры оболочки определяются выражениями

$$B = 2Et / (1 - \mu^2), \quad C = Et(c + t)^2 / (1 - \mu^2), \quad \Lambda = G_3(c + t)^2 / c; \quad (3)$$

E , μ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона несущих слоев; G_3 — модуль поперечного сдвига заполнителя; t , c — толщина несущих слоев и заполнителя соответственно.

в) Геометрические соотношения для компонент тензоров тангенциальной и изгибной деформации ϵ_{ij} , κ_{ij} и кинетического вектора поперечных сдвигов ϵ_{i3} :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= 1/2(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i + 2b_{ij}w), \quad \kappa_{ij} = 1/2(\nabla_i \psi_j + \nabla_j \psi_i), \\ \epsilon_{i3} &= \psi_i + \nabla_i w - b_i^j v^j, \end{aligned} \quad (4)$$

где w — нормальный прогиб; $v_i = 1/2(v_i^{(1)} + v_i^{(2)})$, $\psi_i = (v_i^{(1)} - v_i^{(2)})/(t + c)$ — углы сдвига заполнителя; $v_i^{(1,2)}$ — компоненты вектора перемещения срединной поверхности соответственно верхнего (1) и нижнего (2) несущих слоев.

г) Уравнения неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} -\nabla_i (c^{ik} c^{jl} \kappa_{kl}^*) + b_i^j (c^{ij} \zeta_j) &= 0, \\ -\nabla_i (c^{ij} \zeta_j) + b_{ij} (c^{ik} c^{jl} \kappa_{kl}^*) &= 0, \\ -\nabla_i (c^{ik} c^{jl} \varepsilon_{kl}) + c^{ij} \zeta_j &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

в которых следует принять

$$\kappa_{ij}^* = \kappa_{ij} - 1/2 (\nabla_i \varepsilon_{j3} + \nabla_j \varepsilon_{i3}), \quad \zeta_i = \partial \omega_3 / \partial x_i - c^{kl} b_{il} (\psi_k - \varepsilon_{k3}). \quad (6)$$

Посредством (1) и (5), (6) известная статико-геометрическая аналогия теории однородных изотропных оболочек (4) обобщается на теорию трехслойных оболочек:

$$\begin{aligned} T^{ij} &\leftrightarrow c^{ik} c^{jl} [\kappa_{kl} - 1/2 (\nabla_k \varepsilon_{l3} + \nabla_l \varepsilon_{k3})], \\ N^i &\leftrightarrow -c^{ij} \zeta_j, \quad M^{ij} \leftrightarrow c^{ik} c^{jl} \varepsilon_{kl}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следуя В. В. Новожилову (4, 5), введем понятие о комплексных усилиях и моментах теории трехслойных оболочек:

$$\begin{aligned} \tilde{T}^{ij} &= T^{ij} - \sqrt{-1} \lambda c^{ik} c^{jl} [\kappa_{kl} - 1/2 (\nabla_k \varepsilon_{l3} + \nabla_l \varepsilon_{k3})], \\ \tilde{N}^i &= N^i + \sqrt{-1} \lambda c^{ij} \zeta_j, \quad \tilde{M}^{ij} = M^{ij} + \sqrt{-1} \lambda c^{ik} c^{jl} \varepsilon_{kl}, \end{aligned} \quad (8)$$

где λ — некоторый постоянный, пока неопределенный, множитель.

Умножая каждое из уравнений неразрывности (5) на $-\sqrt{-1} \lambda$ и складывая их с соответствующими уравнениями равновесия (1), запишем их в виде одной системы уравнений в комплексных усилиях и моментах:

$$\begin{aligned} \nabla_i \tilde{T}^{ij} - b_i^j \tilde{N}^i + q^j &= 0, \\ \nabla_i \tilde{N}^i + b_{ij} \tilde{T}^{ij} + q &= 0, \\ \nabla_i \tilde{M}^{ij} - \tilde{N}^j + m^j &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Комплексные моменты в (8) и (9) не являются независимыми и могут быть выражены через комплексные усилия. Действительно, из соотношений закона Гука (2), (3) и (8) следует, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2Et} P_{ijkl} \operatorname{Re} \tilde{T}^{kl}, \quad \varepsilon_{i3} = \frac{\operatorname{Re} N_i}{\Lambda}, \\ \kappa_{ij} &= -\frac{1}{\lambda} c_{ki} c_{lj} \operatorname{Im} \tilde{T}^{kl} - \frac{1}{2\Lambda} \operatorname{Re} \tilde{Q}_{ij}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$P_{ijkl} = a_{ik} a_{jl} - \mu c_{ik} c_{jl}, \quad \tilde{Q}_{ij} = \nabla_j \tilde{N}_i + \nabla_i \tilde{N}_j.$$

Тогда по формулам (2) и (8)

$$\begin{aligned} M^{ij} &= -CE^{ijkl} \left(\frac{1}{\lambda} c_{ml} c_{nk} \operatorname{Im} \tilde{T}^{mn} - \frac{1}{2\Lambda} \operatorname{Re} \tilde{Q}_{kl} \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{-1} \lambda}{2Et} c^{ik} c^{jl} P_{klmn} \operatorname{Re} \tilde{T}^{mn}. \end{aligned} \quad (11)$$

Найдем теперь величину λ из условия однородности слагаемых в (11), т. е.

$$C/\lambda = \lambda/(2Et),$$

откуда

$$\lambda = \sqrt{2CEt} = \sqrt{2Et}(c+t) / \sqrt{1-\mu^2}. \quad (12)$$

В этом случае формула (11) примет вид

$$M^{ij} = \sqrt{-1} \lambda (c^{ik} c^{jl} \tilde{T}_{lk} - \mu a^{ik} a^{jl} \tilde{T}_{lk}) + \frac{C}{2\Lambda} E^{ijkl} \operatorname{Re} \tilde{Q}_{kl}. \quad (13)$$

Исключая из уравнений (8) с помощью (13) комплексные моменты $\tilde{M}^{ij}$, приходим к уравнениям, содержащим лишь комплексные усилия $\tilde{T}^{ij}$ и $\tilde{N}^i$, однако в таком виде они довольно громоздки и непригодны для пользования.

Если упростить последние уравнения, отбрасывая в них малые члены порядка λb_i^j , то они примут вид

$$\nabla_i \tilde{T}^{ij} - b_i^j \tilde{N}^i + q^j = 0, \quad \nabla_i \tilde{N}^i + b_{ij} \tilde{T}^{ij} + q = 0, \quad (14)$$

$$\sqrt{-1} \lambda [\nabla_i a^{ij} \tilde{T} + (1 + \mu) q^j] + \frac{C}{2\Lambda} \nabla_i [E^{ijkl} \operatorname{Re} (\nabla_k \tilde{N}_l + \nabla_l \tilde{N}_k)] - \tilde{N}^j = 0,$$

где $\tilde{T} = a^{ij} \tilde{T}_{ij}$ — комплексная функция.

Если перейти в (14) к пределу при $\Lambda \rightarrow \infty$, исключить из полученных при этом равенств комплексные поперечные силы $\tilde{N}_i$, то в итоге получим уравнения

$$\nabla_i \tilde{T}^{ij} - \sqrt{-1} \lambda b_i^j a^{ik} \nabla_k \tilde{T} = -q^j, \quad (15)$$

$$\sqrt{-1} \lambda a^{ij} \nabla_i \nabla_j \tilde{T} + b_{ij} \tilde{T}^{ij} = -q,$$

полностью совпадающие с уравнениями, найденными В. В. Новожиловым в рамках теории Кирхгофа — Лява для однородных изотропных оболочек.

Полученные уравнения (14) могут быть положены в основу исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с легким заполнителем.

Научно-исследовательский институт механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 VII 1971

Физико-механический институт
Академии наук СССР
Львов

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Э. И. Григолюк, Изв. АН СССР, ОН, № 1 (1957). ² Э. И. Григолюк, Изв. АН СССР, ОН, № 1 (1958). ³ Б. Л. Пелех, Е. И. Лунь, ДАН, 192, № 3 (1970). ⁴ В. В. Новожилов, Теория тонких оболочек, 1951. ⁵ В. В. Новожилов, В сборн. Тр. IV Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин, Ереван, 1964.