

УДК 517

МАТЕМАТИКА

И. К. ДАУГАВЕТ

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА МАРКОВА — НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 IV 1972)

1°. Пусть Ω — ограниченная область в s -мерном пространстве. Будем говорить, что Ω принадлежит классу $\mathfrak{R}_1$, если для нее выполняются утверждение теоремы С. М. Никольского ⁽¹⁾ о покрытиях и условие конуса С. Л. Соболева ⁽²⁾. Будем говорить, что область Ω принадлежит классу $\mathfrak{R}_2$, если она имеет дважды непрерывно дифференцируемую границу.

Введем следующие обозначения. Пусть $r = r(x)$ — расстояние точки $x \in \Omega$ до границы области Ω , $r_n = r + 1/n^2$, $\|f\|_p$ — норма функции $f(x)$ в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$. Если $m = (m_1, m_2, \dots, m_s)$ — вектор с целыми $m_i \geq 0$, то $|m| = \sum m_i$, $D^m f = \partial^{|m|} f / \partial \xi_1^{m_1} \dots \partial \xi_s^{m_s}$, где ξ_i — компоненты вектора x . Буквой C с индексами будем обозначать положительные постоянные, которые могут зависеть от всех параметров, входящих в соответствующее неравенство, кроме n и P_n . Через $P_n(x)$ будет обозначаться произвольный многочлен степени не выше n от s переменных.

2°. Пусть μ и ν — любые вещественные числа, $1 \leq p, q \leq +\infty$, $|m| \geq 0$.

Теорема 1. Если $\Omega \in \mathfrak{R}_1$, то для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\|r_n^\nu D^m P_n\|_q \leq C_1 \varphi(n) \|r_n^\mu P_n\|_p, \quad (1)$$

где

$$\varphi(n) = \varphi(n; m, p, q, \mu, \nu) = \begin{cases} n^{\sigma_1}, & \text{если } q > p \text{ и } \sigma_1 \geq \sigma_2, \\ n^{\sigma_2}, & \text{если } q > p \text{ и } \sigma_2 \geq \sigma_1, \\ n^{\sigma_3}, & \text{если } q \leq p \text{ и } \sigma_3 > |m|, \\ n^{|m|} (\ln n)^{1/q-1/p}, & \text{если } q \leq p \text{ и } \sigma_3 = |m|, \\ n^{|m|}, & \text{если } q \leq p \text{ и } \sigma_3 < |m|, \end{cases}$$

$$\sigma_1 = |m| + s/p - s/q,$$

$$\sigma_2 = 2[|m| + (s/p + \mu) - (s/q + \nu)],$$

$$\sigma_3 = [|m| + (1/p + \mu) - (1/q + \nu)].$$

При $q > p$ для областей класса $\mathfrak{R}_2$ неравенство (1) может быть существенно усилено.

Теорема 2. Пусть $\Omega \in \mathfrak{R}_2$ и $q > p$.

Тогда для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\|r_n^\nu D^m P_n\|_q \leq C_2 \psi(n) \|r_n^\mu P_n\|_p, \quad (2)$$

где

$$\psi(n) = \psi(n; m, p, q, \mu, \nu) = n^{\max(\sigma_1, \sigma_4)},$$

$$\sigma_4 = 2 \left[|m| + \left(\frac{s+1}{2p} + \mu \right) - \left(\frac{s+1}{2q} + \nu \right) \right].$$

3°. Теорема 3. Пусть $\Omega \in \mathfrak{R}_1$ и $\mu p + 1 > 0$.

Тогда для любого полинома $P_n(x)$ степени не выше n выполняется неравенство

$$\|r^\mu P_n\|_p \leq C_3 \|r_n^\mu P_n\|_p \leq C_4 \|r^\mu P_n\|_p. \quad (3)$$

Как непосредственное следствие теорем 1—3 получается

Теорема 4. Пусть $\mu p + 1 > 0$, $\nu q + 1 > 0$. Если $\Omega \in \mathfrak{R}_1$, то

$$\|r^\nu D^m P_n\|_q \leq C_5 \varphi(n) \|r^\mu P_n\|_p. \quad (4)$$

Если $\Omega \in \mathfrak{R}_2$ и $q > p$, то

$$\|r^\nu D^m P_n\|_q \leq C_6 \psi(n) \|r^\mu P_n\|_p. \quad (5)$$

Здесь $\varphi(n)$ и $\psi(n)$ те же, что в теоремах 1 и 2.

4°. Некоторые частные случаи неравенств (1) и (4) известны (¹, ³⁻⁵); неравенства (4), (5) являются обобщением на многомерный случай неравенств, доказанных в (⁶).

При $q \leq p$ неравенство (1) легко доказывается в одномерном случае и переносится на многомерный методом С. М. Никольского (¹). Основная идея доказательства (1) при $q > p$ и (2) та же, что для известных одномерных неравенств (⁷), стр. 251).

Неравенство (3) доказывается сначала для одномерного случая с использованием неравенства (1) и неравенств работы (⁶) и переносится на многомерный случай методом С. М. Никольского.

5°. Все доказанные неравенства в некотором смысле являются точными. Будем говорить, что неравенство вида

$$\|u_n D^m P_n\|_q \leq C_7 \chi(n) \|v_n P_n\|_p$$

является точным для области Ω , если существует такая постоянная $C_8 > 0$, что

$$\sup_{P_n} \frac{\|u_n D^m P_n\|_q}{\|v_n P_n\|_p} \geq C_8 \chi(n).$$

Неравенство (1) при $q > p$ и $\sigma_1 \geq \sigma_2$ является точным для любой области $\Omega \in \mathfrak{R}_1$; во всех остальных случаях существуют такие области $\Omega \in \mathfrak{R}_1$, для которых оно точно. При $q > p$ к числу таких областей относятся s -мерный куб, при $q \leq p$ — s -мерный шар и s -мерный куб (если $\sigma_3 \geq |m|$ и оценивается смешанная производная; дополнительно предполагается, что хоть одно ребро куба неортогонально всем координатным осям).

Неравенство (2) при $\sigma_1 \geq \sigma_4$ является точным для любой области $\Omega \in \mathfrak{R}_2$, а при $\sigma_4 > \sigma_1$ — по крайней мере для s -мерного шара. Из последнего вытекает, в частности, ошибочность неравенства (16) работы (¹), которое приводится там без доказательства.

Точность неравенств (4) и (5) в том же смысле следует из (3).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. M. Nikolskii, *Mathematica*, 8, 2, 345 (1966). ² С. Л. Соболев, *Матем. сборн.*, 46, 3, 471 (1938). ³ И. Ю. Харрик, *ДАН*, 106, № 2, 203 (1956). ⁴ С. Г. Михлин, *Дифференциальные уравнения с частными производными* (Тр. Симпозиума), 1970, стр. 158. ⁵ С. Г. Михлин, *Вестн. Ленингр. ун-в.*, № 13, сер. матем., мех. и астр., в. 3, 54 (1969). ⁶ И. К. Даугавет, С. З. Рафальсон, *Вестн. Ленингр. ун-в.*, № 1, сер. матем., мех. и астр., в. 1, 15 (1972). ⁷ А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, М., 1960.