

Член-корреспондент АН СССР Ю. Л. ЕРШОВ

НЕПРЕРЫВНЫЕ РЕШЕТКИ И A -ПРОСТРАНСТВА

1. Настоящая статья содержит расширение ряда результатов работы ⁽²⁾ и сравнение введенных в ⁽²⁾ понятий с понятием непрерывной решетки, которое определил Д. Скотт ⁽³⁾. Здесь указаны также возможности расширения конструкции Д. Скотта для построения модели λ -исчисления, которые вместе с результатами работ ^(1, 2) позволяют строить эффективные модели для λ -исчисления, а именно, можно построить такой (бесконечный) класс S рекурсивно перечислимых множеств, который обладает главной вычислимой нумерацией $v: N \rightarrow S$ и такой, что существует ⁽¹⁾ $\text{Mor}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$, где $\mathcal{S} = (S, v)$, нумерованные множества $\mathcal{S}$ и $\text{Mor}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ (рекурсивно) изоморфны и «отождествление» $\mathcal{S}$ и $\text{Mor}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ образует модель для λ -исчисления.

Предполагается знакомство с работами ^(2, 3).

Основное понятие появилось как попытка синтеза понятий f -пространства ⁽²⁾ и инъективного пространства (непрерывной решетки) ⁽³⁾, между которыми нет включений. Буква A в названии этого понятия возникла как сокращение от более развернутого словосочетания «топологическое пространство с (хорошей) аппроксимацией». Следует здесь заметить, что в понятии f -пространства ⁽²⁾ f -элементы «играют роль» конечных (finite) множеств.

2. Определим основное понятие этой статьи — понятие A -пространства. Топологическое T_0 -пространство X назовем A -пространством, если существует такое подмножество $X_0 \subseteq X$, что выполнены следующие три условия:

1) Если $\leq$ обозначает частичный порядок на X , определенный топологией ($x \leq y \Leftrightarrow$ для любого открытого подмножества $U \subseteq X$, если $x \in U$, то и $y \in U$), то $\langle X_0, \leq \rangle$ — подпарус ⁽²⁾ $\langle X, \leq \rangle$, т. е. для любых $x, y \in X_0$, если существует $z \in X$ такой, что $x \leq z$ и $y \leq z$ (в этом случае будем говорить, что x и y совместны в X), то существует $z_0 \in X_0$ такой, что для любого $z \in X$

$$x \leq z \text{ \& } y \leq z \Leftrightarrow z_0 \leq z.$$

Другими словами, z_0 — наименьшая верхняя грань элементов x и y в X ; будем обозначать ее $z_0 = x \cup y$. Операция $\cup$ — частичная операция на X_0 .

2) Для любого $x \in X$ через $\check{x}$ обозначим множество $\{y | y \in X, x \leq y\}$, а через $\check{\check{x}}$ — наибольшее открытое множество, содержащееся в $\check{x}$ (т. е. $\check{x} = \text{Int } \check{x}$). Отношение $y \in \check{\check{x}}$ будем писать иначе так: $x < y$ (это согласовано с обозначениями Д. Скотта ⁽³⁾) и говорить, что x сильно меньше y . Тогда семейство множеств вида $x_0, x_0 \in X_0$, образует базис (быть может, без пустого множества) топологии пространства X .

З а м е ч а н и е 1. Если $x, y \in X_0$ и x, y совместны, то имеет место очевидное равенство $x \cap y = (x \cup y)$ (так же, как и $\check{\check{x}} \cap \check{\check{y}} = (\check{\check{x}} \cup \check{\check{y}})$).

З а м е ч а н и е 2. Вполне может быть, что существуют элементы $x \in X$, которые сильно меньше самого себя. Например, любой f -элемент f -пространства ⁽²⁾ будет таким.

З а м е ч а н и е 3. Из условий 1), 2) вытекает, что для любого $x \in X$ $x = \sup \{x_0 | x_0 \in X_0, x_0 < x\}$.

3) Для любых $x_0 \in X_0$, $x \in X$, если $x_0 < x$, то существует $x_1 \in X_0$ такой, что $x_0 < x_1$ и $x_1 < x$.

Замечание. Из условий 1)–3) вытекает, что для любого $x \in X$ x является предельной (в смысле топологии) точкой множества $\{x_0 | x_0 \in X_0, x_0 < x\}$.

A -пространство X назовем A_0 -пространством, если X (а следовательно, и X_0) имеет наименьший элемент.

Всякое подмножество X_0 A -пространства X , удовлетворяющее условиям определения, вместе с индуцированной топологией, назовем **базисным подпространством** (A -пространства X).

Следствие 1. Если $X - f(f_0)$ -пространство ⁽²⁾, X_0 — подпространство всех f -элементов X (базисное подпространство в терминологии ⁽²⁾), то $X - A(A_0)$ -пространство с базисным подпространством X_0 .

Следствие 2. Топологическое T_1 -пространство X будет A -пространством, если и только если X — дискретное пространство.

Замечание. Базисное подпространство A -пространства определяется, вообще говоря, не однозначно. Например, для полного f -пространства X базисными подпространствами являются подпространство X_0 всех f -элементов и само пространство X .

Для f -пространства X базисное подпространство всех f -элементов будем называть **главным базисным подпространством**.

Сформулируем теперь основные (категорные) свойства $A(A_0)$ -пространств.

Теорема 1. Если $X_i, i \in I$, — конечное семейство $A_0(A)$ -пространств, то $\prod_{i \in I} X_i - A_0(A)$ -пространство, где произведение $\prod$ берется в категории топологических пространств.

Теорема 2. Если X — произвольное A_0 -пространство, $Y - A_0$ -пространство, то множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y , снабженное топологией поточечной сходимости, является A_0 -пространством.

Не оговаривая, дальше будем всегда предполагать, что пространство непрерывных функций снабжено топологией поточечной сходимости.

Теорема 3. Если $X, Y - A$ -пространства, $Z - A_0$ -пространство, то топологические пространства $C(X \times Y, Z)$ и $C(X, C(Y, Z))$ естественно гомеоморфны.

Предложение 1. Если $X - A$ -пространство, а Y, Z — произвольные топологические пространства, то отображение $f: X \times Y \rightarrow Z$ будет непрерывным тогда и только тогда, когда оно непрерывно по каждому аргументу.

3. A -пространство X (с базисным подпространством X_0) назовем **полным A -пространством**, если для любого не пустого направленного семейства $S \subseteq X$ такого, что если $x \in S$, то существует $x' \in S$ такой, что $x < x'$, в X существует предельная точка x для S , которая является верхней гранью для S .

Замечание 1. В условиях определения, $x = \sup S$.

Замечание 2. Свойство полноты пространства X не зависит от выбора базисного подпространства X_0 .

Замечание 3. Если X — полное A -пространство, то $\langle X, \leq \rangle$ — полный парус ⁽²⁾, однако обратное не верно.

Замечание 4. Если X — полное A -пространство, то само X является своим базисным подпространством.

Теорема 4. Если $\mathfrak{A}$ — категория топологических A -пространств, $\mathfrak{A}_\pi$ — полная подкатегория $\mathfrak{A}$ всех полных A -пространств, то существует функтор $\Pi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_\pi$ (функтор пополнения), сопряженный слева функтору вложения $\mathfrak{A}_\pi$ в $\mathfrak{A}$.

Другими словами, для каждого A -пространства X существует «наименьшее» пополнение $\Pi(X)$ с хорошими функторными свойствами.

Некоторое объяснение теореме 4 даст следующее понятие и его свойства: A -пространства X и Y назовем базисно эквивалентными ($X \approx Y$), если они обладают гомеоморфными базисными подпространствами.

Теорема 5. Если $X, X' - A$ -пространства, $Y, Y' - A_0$ -пространства, $X_0 -$ базисное подпространство X , то:

1) $X \approx X', Y \approx Y' \Rightarrow C(X, Y) \approx C(X', Y')$;

2) $X \approx X_0$;

3) если $Y -$ полное A_0 -пространство и $X \approx X'$, то $C(X, Y)$ и $C(X', Y)$ естественно гомеоморфны;

4) $X \approx \Pi(X)$;

5) $X \approx X' \Rightarrow \Pi(X)$ гомеоморфно $\Pi(X')$.

Теорема 1*. Если $X_i, i \in I, -$ семейство полных A_0 -пространств, то $\prod_{i \in I} X_i -$ полное A_0 -пространство.

Теорема 2*. Если $X -$ произвольное A_0 -пространство, а $Y -$ полное A_0 -пространство, то $C(X, Y) -$ полное A_0 -пространство.

Предложение 2. Ретракт полного A -пространства является полным A -пространством.

Следующее утверждение установит связь с понятиями работ (2, 3).

Предложение 3. а) Всякое полное f -пространство является полным A -пространством.

б) Всякое полное A (A_0)-пространство является ретрактом полного f (f_0)-пространства.

в) Топологическое пространство X будет инъективным пространством (3) (или, что то же, $\langle X, \leq \rangle$ будет непрерывной решеткой), если и только если $X -$ полное A_0 -пространство, имеющее наибольший элемент.

Таким образом, понятие A -пространства охватывает и понятие f -пространства и понятие непрерывной решетки и сохраняет основные полезные свойства этих понятий. Эти свойства позволяют, например, провести конструкции λ -моделей функционалов C для всякого полного A -пространства, как в работе (2).

4. Пусть $X -$ A -пространство с базисным подпространством X_0 , $Y -$ A -пространство с базисным подпространством Y_0 . Пару непрерывных отображений $e: X \rightarrow Y$ и $\pi: Y \rightarrow X$ назовем базисным проектированием (а X будем называть базисной проекцией Y), если выполнены следующие условия:

1) $\pi e = \text{id}_X$;

2) $e(X_0) \subseteq Y_0, \pi(Y_0) \subseteq X_0$;

3) для любого $y \in Y$ $e\pi(y) \leq y$.

Замечание 1. Определение и само понятие базисного проектирования зависят от выбора базисных подпространств X_0 и Y_0 .

Замечание 2. Во втором включении в п. 2) на самом деле равенство, как это следует из п. 1) и первого включения п. 2).

Пусть $X^i, i \in I, -$ семейство A -пространств (с фиксированными для дальнейшего базисными подпространствами $X_0^i, i \in I$). Предположим далее, что $\langle I, \leq \rangle -$ предупорядоченное направленное множество и что для каждой пары $i, j \in I$ такой, что $i \leq j$, задана пара непрерывных отображений $e_{ij}: X^i \rightarrow X^j, \pi_{ij}: X^j \rightarrow X^i$ таких, что $(e_{ij}, \pi_{ij}) -$ базисное проектирование; система $\{X^i, \pi_{ij} | i, j \in I, i \leq j\}$ является обратным спектром топологических пространств, а система $\{X^i, e_{ij} | i, j \in I, i \leq j\}$ (так же как и система $\{X_0^i, e_{ij} | X_0^i \subseteq X_0^j, i, j \in I, i \leq j\}$) является прямым спектром множеств. Тогда, если $\bar{X}^I = \varprojlim X^i -$ топологическое пространство, являющееся обратным пределом спектра $\{X^i, \pi_{ij} | i, j \in I, i \leq j\}$, а $X^I = \varinjlim X^i$ ($X_0^I = \varinjlim X_0^i$) - множество, являющееся прямым пределом спектра $\{X^i, e_{ij} | i, j \in I, i \leq j\}$ ($\{X_0^i, e_{ij} | X_0^i \subseteq X_0^j, i, j \in I, i \leq j\}$), то существует естественное вложение $e: X^I \rightarrow \bar{X}^I$ ($e_0: X_0^I \rightarrow \bar{X}^I$), которое позволяет отождествить X^I (X_0^I) с подмножеством $\bar{X}^I$. В этих условиях справедлива

Теорема 6. *Пространство $\bar{X}^I$ является A -пространством с базисным подпространством X_0^I . Если все $X^i, i \in I$, — полные A -пространства, то $\bar{X}^I$ — полное A -пространство. Если все X^i — f -пространства, а X_0^i — их главные базисные подпространства, $i \in I$, $\bar{X}^I$ — f -пространство, а X_0^I — его главное базисное подпространство.*

Замечание. Для любого $i \in I$ естественная композиция $e_i: X^i \rightarrow \rightarrow X^i (= \varinjlim X_i) \rightarrow \bar{X}^I$ вместе с проекцией $\pi_i: \bar{X}^I \rightarrow X^i$ образует базисное проектирование.

Укажем теперь, как построить упомянутый во введении класс рекурсивно перечислимых множеств S с указанными там свойствами. Если взять любой конечный парус X_0 с нулем и построить, как в работе Д. Скотта⁽³⁾, биспектр $\{X_i, e_{ij}, \pi_{ij} | i, j \in N, i \leq j\}$, тогда, как легко видеть, $X_\omega^0 = \varinjlim X_i$ — конструктивный парус. А по доказанному Скоттом гомеоморфизму $X_\omega = \varinjlim X_i$ и $C(X_\omega, X_\omega)$ и теоремам 5, 6, X_ω — f_0 -пространство с базисным подпространством X_ω^0 и X_ω^0 гомеоморфно главному базисному подпространству $C(X_\omega, X_\omega)$. Далее строим над X_ω^0 полное kf_0 -пространство $\mathcal{S} = X_\omega^k$, тогда, по доказанным в работе⁽²⁾ свойствам, $\text{Mog}(\mathcal{S}, \mathcal{S}) \cong C(X_\omega^k, X_\omega^k)$ и, рассматривая эти множества как топологические пространства, имеем $\text{Mog}(X_\omega^k, X_\omega^k) \cong C(X_\omega^k, X_\omega^k)$, $C(X_\omega^k, X_\omega^k) \cong C(X_\omega, X_\omega)$, так что X_ω^0 можно считать базисным подпространством $\text{Mog}(X_\omega^k, X_\omega^k)$, а так как для полного kf_0 -пространства $\mathcal{S}$ $\text{Mog}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$ — также полное kf_0 -пространство, то из их базисной эквивалентности (которая, очевидно, эффективна), получаем, что $\mathcal{S} \approx \text{Mog}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
6 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ю. Л. Ершов, Алгебра и логика, **10**, № 3, 247 (1971). ² Ю. Л. Ершов, там же, **11**, № 4, 360 (1972). ³ D. Scott, Continuous Lattices, Oxford Univ. Comp. Lab., 1971.