

УДК 517.92

МАТЕМАТИКА

А. Б. КУРЖАНСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ НАБЛЮДЕНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 29 X 1971)

Задачи оптимального синтеза операций наблюдения и прогнозирования ⁽¹⁾ рассматриваются путем привлечения методов и конструкций, развитых в теории дифференциальных игр ^(2, 3).

1. Позиционное наблюдение. На промежутке $[t_0, \theta]$ рассматривается n -векторная система

$$dx/dt = A(t)x + B(t)v \quad (1)$$

с неизвестной r -векторной функцией $v(t)$ и соответствующий наблюдаемый m -векторный сигнал $y(t) = G(t)x(t)$. Заданы параметры уравнений — непрерывные функции $A(t)$, $B(t)$, $G(t)$ и ограничение: $v(t) \in P$ при почти всех $t \in [t_0, \theta]$ на значения функций $v(t)$ (P — выпуклый уравновешенный компакт в R_r). Для каждого $t \in [t_0, \theta]$ известна реализация наблюдаемого сигнала, функция $y(t + \xi) = y_t(\cdot)$, $t_0 - t \leq \xi \leq 0$. По текущей информации требуется для каждого t так выбрать вектор w_t , чтобы найденная в силу операции $\zeta(t) = \int_{t_0-t}^0 w_{t+\xi} y(t + \xi) d\xi$ величина $\zeta(\theta)$ наилуч-

шим образом оценивала бы величину $c'x(\theta)$ (c — заданный вектор, штрих означает транспонирование).

Формировать w_t будем по $y_t(\cdot)$, а также по всем реализованным ранее величинам $\{w_\tau\}$, $\tau \in [t_0, t]$, т. е. в виде функционала $w(t, \cdot) = w(t, \eta_t(\cdot))$ от текущей позиции $\{t, \eta_t(\cdot)\}$, где $\eta_t(\cdot) = \eta(t + \xi) = \{y_t(\cdot), \{w_{t+\xi}\}, \xi \in [t_0 - t, 0]\}$. Функции $w[t] = w_t$, реализующие $w_t = w(t, \cdot)$, должны по условию удовлетворять при почти всех $t \in [t_0, \theta]$ включению $w[t] \in Q$, где Q — выпуклый компакт в R_m .

Дополнительно потребуем, чтобы выполнялось условие несмещенности

$$(c'x(\theta) - \zeta(\theta))|_{v=0} = 0. \quad (2)$$

За показатель качества наблюдения примем величину $|\chi(w(t, \cdot), v)|$, $\chi(w(t, \cdot), v) = c'x(\theta) - \zeta(\theta)$, имея целью оптимизировать критерий

$$\varepsilon^0 = \min_{w(t, \cdot)} \sup_{v(t)} |\chi(w(t, \cdot), v)| \quad (3)$$

в заданном классе стратегий $\{w(t, \cdot)\}$ при упомянутом ограничении на $v(t)$. Далее приведены формализованные постановка и решение этой задачи. Предполагается, что при $v(t) \equiv 0$ система (1) вполне наблюдаема ^(1, 4), по $y(t)$.

Таким образом, операция наблюдения по ходу времени должна перестраиваться в соответствии с поступающей информацией. Следовательно, предлагаемая задача относится к изложенным в ^(1, 5) точно так же, как дифференциально-игровые позиционные задачи управления относятся к игровым задачам программного управления.

2. Вспомогательные построения. Пусть на $[t_0, t)$, $t < \theta$, известны реализация $y_t^*(\cdot) = y^*(t + \xi) = G(t + \xi)x(t + \xi)$, $t_0 - t \leq \xi \leq 0$, и функция $w_t^*(\cdot) = w^*(t + \xi)$, $t_0 - t \leq \xi < 0$, содержащаяся при почти всех

ξ во множестве Q , т. е., иными словами, позиция $\{t, \eta_i(\cdot)\}; \eta_i(\cdot) = \{y_i^*(\cdot), w_i^*(\cdot)\}$.

Обозначим

$$F(t, w_i^*(\cdot)) = F(t, \cdot) = \\ = \{w(\tau) : w(\tau) \in Q, \quad \tau \in [t_0, \theta]; \quad w(t + \xi) \equiv w^*(t + \xi), \quad \xi \in [t_0 - t, 0]\},$$

$$F_1 = \left\{ w(\tau) : \int_{t_0}^{\theta} w(\tau) G(\tau) X(\tau, \theta) d\tau = c' \right\},$$

$$\zeta(t) = \int_{t_0}^t w^*(\tau) y^*(\tau) d\tau; \quad dX(\tau, \theta)/d\tau = A(\tau) X(\tau, \theta), \quad X(\theta, \theta) = E$$

(E — единичная $(n \times n)$ -матрица), $f(\cdot) = \{f(\tau), t_0 \leq \tau \leq \theta\}$,

$$f(t, \cdot) = \{f(t + \sigma), 0 \leq \sigma \leq \theta - t\}, \quad v_i(\cdot) = \{v(t + \xi) : \xi \in [t_0 - t, 0]\},$$

$$\mathcal{Y}(t, y_i^*(\cdot)) = \mathcal{Y}(t, \cdot) = \{y(\cdot) = y(t + \xi) \equiv y^*(t + \xi), \xi \in [t_0 - t, 0]\},$$

$$\mathcal{P}(t, \cdot) = \{v(t, \cdot) : v(t + \sigma) \in P, \sigma \in [0, \theta - t]\};$$

$$\mathcal{P}_i(\cdot) = \{v_i(\cdot) : v(t + \xi) \in P, \xi \in [t_0 - t, 0]\},$$

$$\mathcal{Q}(t, \cdot) = \{w(t, \cdot) : w(t + \sigma) \in Q, \sigma \in [0, \theta - t]\},$$

$$\mathcal{X}(t, \cdot) = \mathcal{X}(t, \eta_i(\cdot)) = \{x : \exists v_i(\cdot) \in \mathcal{P}_i(\cdot) \text{ такое, что при } t_0 \leq \tau \leq t$$

$$y^*(\tau) \equiv G(\tau) X(\tau, t) x - \int_{\tau}^t G(t) X(t, s) B(s) v(s) ds\}.$$

Заметим, что F_1 есть множество функций, удовлетворяющих условию (2). Сосчитав $\chi = (c'x(\theta) - \zeta(\theta)/t, \eta_i(\cdot))$, получим $\chi = \chi(w(t, \cdot), v(t, \cdot), y(\cdot), x(t))$, где $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(t, \cdot)$, $w(t, \cdot) \in \mathcal{Q}(t, \cdot)$, $x(t) \in \mathcal{X}(t, \cdot)$, $v(t, \cdot) \in \mathcal{P}(t, \cdot) \cap \mathcal{P}(t, y(\cdot))$, $\mathcal{P}(t, y(\cdot)) = \{v(t, \cdot) : \exists x \in \mathcal{X}(t, \cdot) \text{ такой,}$

что $y(\tau) \equiv G(\tau)(X(\tau, t)x(t) + \int_{\tau}^t X(\tau, s)B(s)v(s)ds), \tau \in [t, \theta]\}$.

Определение 1. Областью достижимости из позиции $\{t, \eta_i(\cdot)\}$ за время $\theta - t$ для функции $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(t, \cdot)$ будем называть множество $G(t, y(\cdot), \eta_i(\cdot)) = G(t, y(\cdot), \cdot)$, состоящее из чисел, удовлетворяющих условию: $\gamma \in G(t, y(\cdot), \cdot)$ тогда и только тогда, когда существует функция $w(t, \cdot) \in \mathcal{Q}(t, \cdot)$ такая, что $\gamma = \chi(w(t, \cdot), y(\cdot)) = \max \chi(w(t, \cdot), v(t, \cdot), y(\cdot), x(t))$ по всем $v(t, \cdot) \in \mathcal{P}(t, \cdot) \cap \mathcal{P}(t, y(\cdot))$, $x(t) \in \mathcal{X}(t, \cdot)$.

Области $G(t, y(\cdot), \eta_i(\cdot))$ выпуклые. Обозначим $d(t, \eta_i(\cdot)) = d(t, \cdot) = \max r(G(t, y(\cdot), \cdot), 0)$ по всем $y(\cdot) \in \mathcal{Y}(t, \cdot)$. Здесь $r(G, 0)$ — евклидово расстояние от множества G до начала координат.

Лемма 1. Справедлива формула $d(t, \cdot) = \max(d_0, 0)$, где $d_0 = \sup_{\alpha, v(t, \cdot), l} \{-\psi_i(\alpha, l, v(t, \cdot), \eta_i(\cdot))\}$ по всем $\alpha: |\alpha| = 1, v(t, \cdot) \in \mathcal{P}(t, \cdot), l \in R_n$.

Здесь

$$\psi_i(\alpha, l, v(t, \cdot), \eta_i(\cdot)) = \left\{ \int_0^{\theta-t} \rho_Q[G(t + \xi)x_*(t + \xi)] d\xi - \Phi(y_i^*(\cdot), \alpha s(t)) - \right. \\ \left. - c'x_*(\theta) + s'(t)x_*(t) + \alpha \zeta(t) \right\},$$

$$\varphi(y_i^*(\cdot), s) = \max_{v(\tau)} \inf_{l(\sigma)} \left\{ \int_{t_0}^{\tau} l(\sigma) G(\sigma) X(\sigma, \tau) B(\tau) v(\tau) d\sigma d\tau + \int_{t_0}^{\tau} l(\sigma) y^*(\sigma) d\sigma \right\},$$

по всем $l(\sigma): L(s) = \{l(\sigma): \int l(\sigma) G(\sigma) X(\sigma, t) d\sigma = s\}$, $v_i(\cdot) \in \mathcal{P}_i(\cdot)$,

$\rho_0[l]$ — опорная функция компакта Q (величина $\varphi(y_i^*(\cdot), s)$ достигается на экстремальных элементах $\{v_i^0(\cdot) \in \mathcal{P}_i(\cdot), w_i^*(\cdot)\}$), $x_*(t + \xi)$ — решение (1) при $x_*(\theta) = l$, $v = v(t, \cdot)$; $s(t)$ — решение сопряженного уравнения (1, 6)

$$\dot{s}(\tau) = -A'(\tau)s(\tau) + G'(\tau)w^*(\tau), \quad s(t_0) = 0, \quad \tau \in [t_0, t]. \quad (4)$$

Обозначим экстремальные элементы — $\psi_i(\alpha, l, v(t, \cdot), \eta_i(\cdot))$ как $\alpha^0(t, \eta_i(\cdot))$, $l^0(t, \eta_i(\cdot))$, $(v^0(t, \cdot) / t, \eta_i(\cdot))$. Далее предполагаем, что они единственны для каждой из позиций $\{t, \eta_i(\cdot)\}$.

Лемма 2. Пусть дана позиция $\{t, \eta_i(\cdot)\}$.

Тогда функция $w^0 \in F(t, \cdot) \cap F_1$, доставляющая наряду с $v^0(t, \cdot) \in \mathcal{P}(t, \cdot)$ величину $d(t, \cdot)$, удовлетворяет принципу максимума

$$w^0(t + \sigma)x_*^0(t + \sigma) = \max_w w(t + \sigma)x_*^0(t + \sigma), \quad (5)$$

$$w(t + \sigma) \in Q, \quad 0 \leq \sigma \leq \theta - t,$$

где $x_*^0(t + \sigma)$ — решение системы (1), построенное по $x_*(\theta) = l^0(t, \eta_i(\cdot))$, $v(t, \cdot) = (v^0(t, \cdot) / t, \eta_i(\cdot))$.

Заметим, что ниже используется не функция $w_i^*(\cdot)$, но зависящие от нее величины $s(t)$, $\zeta(t)$.

3. Оптимальная стратегия позиционного наблюдения. Сформулируем задачу позиционного наблюдения как дифференциальную игру, считая позицией величину $\{t, \beta_i(\cdot)\}$, $\beta_i(\cdot) = \{y_i^*(\cdot), s(t), \zeta(t)\}$.

Определение 2. Допустимой стратегией наблюдения будем называть многозначный функционал $\mathcal{W}^0(t, \beta_i(\cdot)) = \mathcal{W}^0(t, \cdot)$ со значениями в выпуклом компакте, содержащемся в Q , полунепрерывный сверху (в m -векторном пространстве $C^{(m)}[t_0, t + \Delta t]$) по включению по позиции $\{t, \beta_i(\cdot)\}$ при $\Delta t \geq 0$.

Соответствующие позиции $\{t, \beta_i(\cdot)\}$ реализуются в силу дифференциальных включений (контингенций):

$$\dot{s}(t) = -A'(t)s(t) + G'(t)w[t], \quad s(t_0) = 0, \quad (6)$$

$$\dot{\zeta}(t) = w'[t]y(t), \quad \zeta(t_0) = 0, \quad w[t] \in \mathcal{W}^0(t, \cdot). \quad (7)$$

Пусть $\chi(\mathcal{W}^0(t, \cdot), v) = \zeta(\theta) - c'x(\theta)$ в силу систем (1), (6), (7) $\varepsilon^* = = d(G(t_0, \cdot), 0)$.

Задача 1 (позиционного наблюдения). Пусть для каждого $t \in [t_0, \theta]$ известна текущая позиция $\{t, \beta_i(\cdot)\} = \{t, y_i^*(\cdot), s(t), \zeta(t)\}$, характеризующая доступную измерению информацию. Среди допустимых стратегий наблюдения требуется выбрать оптимальную $\mathcal{W}^0(t, \cdot)$, удовлетворяющую соотношению

$$|\chi(\mathcal{W}^0(t, \cdot), v)| \leq \min_{w'(t, \cdot)} \sup_{v(\cdot) \in \zeta(\theta)} |\chi(\mathcal{W}^0(t, \cdot), v(\cdot))| = \varepsilon^0 \quad (8)$$

при дополнительном условии несмещенности, означающем, что любая из реализаций $w[t] \in \mathcal{W}^0(t, \cdot)$ должна принадлежать F_1 .

При указанных выше условиях абсолютно непрерывное решение системы (6), (7) существует, но, вообще говоря, не однозначно.

Определение 3. Стратегию $\mathcal{W}^0(t, \cdot)$ будем называть экстремальной, если для позиции $\{t, \beta_i(\cdot)\}$, удовлетворяющей условию

$d(t, \cdot) > 0$ имеем $\mathcal{W}_e(t, \cdot) = \{w_e\}$, где $\{w_e\}$ — множество решений задачи (5), составленной для этой позиции, и если при $d(t_i, \cdot) = 0$ имеем $\mathcal{W}_e(t, \cdot) = Q$.

Теорема 1. Экстремальная стратегия $\mathcal{W}_e(t, \cdot)$ допустима и является оптимальной стратегией позиционного наблюдения, т. е. $\mathcal{W}_e(t, \cdot) = \mathcal{W}^0(t, \cdot)$. Справедливо равенство $\varepsilon^0 = \varepsilon^*$.

4. Свойство дуальности. Даны n -мерная система

$$dp/dt = C(t)p + D(t)u[t], \quad u[t] \in \mathcal{U}(t, \cdot), \quad (9)$$

первого игрока и n -мерная система

$$dq/dt = F(t)q + H(t)v(t), \quad (10)$$

второго игрока. Первый игрок располагает в каждый момент $t \in [t_0, \theta]$ полной информацией о векторе $p(t)$ и косвенной о векторе $q(t)$. Именно, известен не n -вектор $q(t)$, но m -векторная функция $r_i(\cdot) = r(t + \xi) = N(t + \xi)q(t + \xi)$, $t_0 - t \leq \xi \leq 0$. Известно также, что при почти всех $t \in [t_0, \theta]$, $v(t) \in P_1$, где $P_1 \subset R_r$ — заданный компакт. Система (9), (10) управляется по принципу обратной связи, по текущей позиции $\{t, \beta_i^*(\cdot)\} = \{t, r_i(\cdot), p(t), \mu(t)\}$, причем

$$\mu(t) = r(t)u[t], \quad \mu(t_0) = 0, \quad u[t] \in \mathcal{U}(t, \cdot). \quad (11)$$

Управления выбираются в классе допустимых стратегий первого игрока — многозначных функционалов $\mathcal{U}(t, \cdot) = \mathcal{U}(t, \beta_i^*(\cdot))$ со значениями в выпуклом компакте, содержащемся в $Q_1 \subset R_m$, полунепрерывных сверху по включению по позиции $\{t, \beta_i^*(\cdot)\}$, $\Delta t \geq 0$. Пусть $\chi^*(\mathcal{U}(t, \cdot), v(\cdot)) = (\mu(\theta) - c'q(\theta) / \mathcal{U}(t, \cdot), v(\cdot))$ в силу (9) — (11).

Задача 2 (дифференциальная игра сближения управляемых систем при неполной информации о координатах). Среди допустимых стратегий $\mathcal{U}(t, \cdot)$ первого игрока найти оптимальную $\mathcal{U}^0(t, \cdot)$, доставляющую условие

$$|\chi^*(\mathcal{U}^0(t, \cdot), v(\cdot))| \leq \min_{\mathcal{U}(t, \cdot)} \sup_{v(\cdot)} \inf_{\mu(\theta)} |\chi^*(\mathcal{U}(t, \cdot), v(\cdot))| = \kappa^0$$

и переводящую фазовый вектор $p(t)$ из состояния $p(t_0) = 0$ в состояние $p(\theta) = c$.

Теорема 2 (свойство дуальности). Пусть $C(t) \equiv A(t)$, $F(t) \equiv -A'(t)$, $H(t) \equiv B(t)$, $N(t) \equiv G(t) = D'(t)$, $P_1 = P$, $Q_1 = Q$.

Тогда оптимальная стратегия $\mathcal{W}^0(t, \cdot)$ задачи 1 совпадает с оптимальной стратегией $\mathcal{U}^0(t, \cdot)$ задачи 2, т. е. $\mathcal{W}^0(t, \cdot) = \mathcal{U}^0(t, \cdot)$, и $\varepsilon^0 = \kappa^0$. Функция $v^0(\cdot)$, реализующая в паре с $\mathcal{W}^0(t, \cdot)$ величину ε^0 , есть как раз управление системы (10), реализующее в паре с $\mathcal{U}^0(t, \cdot)$ величину κ^0 .

Автор выражает искреннюю благодарность акад. Н. Н. Красовскому за ценные советы и внимание к работе.

Институт математики и механики
Уральского научного центра Академии наук СССР
Свердловск

Поступило
1 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Красовский, Теория управления движением, «Наука», 1968. ² Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», 1970. ³ Н. Н. Красовский, Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, № 5, 3 (1969); № 1, 3 (1970). ⁴ Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, Очерки по математической теории систем, М., 1971. ⁵ А. Б. Куржанский, ПММ, 34, № 3, 429 (1970). ⁶ Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1969.