

Ю. Э. ЛИНКЕ

ОБ ОПОРНЫХ МНОЖЕСТВАХ СУБЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 IV 1972)

В статье рассматриваются сублинейные операторы, т. е. субаддитивные, положительно однородные, ограниченные отображения, действующие из банахова пространства X в KB -линеал $C(Q)$ непрерывных функций на компакте Q . Линейный (ограниченный) оператор $A: X \rightarrow C(Q)$ называется опорным к сублинейному оператору P , если $Ax \leq Px$ для всех $x \in X$. Множество Ω_P всех опорных к сублинейному оператору P называется опорным множеством. В работе дается описание опорных множеств, в частности, показывается, что для сепарабельных X множества Ω_P всегда не пусты.

Следует отметить, что сублинейные операторы, действующие в K -пространство, введены и изучались Л. В. Канторовичем в связи с теоремой Хана — Банаха ⁽¹⁾. В последнее время они рассматривались в различных вопросах выпуклого анализа ^(2, 3). Интересные применения сублинейных (надлинейных) операторов даны в ⁽⁴⁾. Эти операторы находят применение также при изучении моделей экономической динамики ⁽⁵⁾.

1. Пусть P — сублинейный оператор. Свяжем с ним семейство сублинейных функционалов $p_t, t \in Q$, такое, что $p_t(x) = (Px)(t)$. Обозначим через $\mathfrak{B}(X')$ совокупность всех не пустых, выпуклых, замкнутых в топологии $\sigma(X', X)$, ограниченных множеств пространства X' . Тогда каждый сублинейный оператор P порождает (многозначное в X') отображение $\Phi_P: Q \rightarrow \mathfrak{B}(X')$, при котором каждому $t \in Q$ сопоставляется опорное множество сублинейного функционала p_t .

Отождествляя линейный оператор $A: X \rightarrow C(Q)$ с непрерывным в топологии $\sigma(X', X)$ отображением $\varphi: Q \rightarrow X'$, определяемым при каждом $t \in Q$ соотношением (см. ⁽⁶⁾, стр. 528) $(Ax)(t) = \varphi(t)(x)$, $x \in X$, легко показать, что линейный оператор A опорен к сублинейному оператору P тогда и только тогда, когда соответствующая ему непрерывная функция φ является селектором отображения Φ_P , т. е. $\varphi(t) \in \Phi_P(t)$.

2. В этом пункте приводится теорема об общем виде сублинейных операторов и, в частности, устанавливаются топологические свойства отображений Φ_P . Так как X' рассматривается в двух топологиях, то условимся говорить «слабо», если имеется в виду топология $\sigma(X', X)$, и «сильно», если топология в X' определяется нормой. Под слабой (сильной) топологией Хаусдорфа в $\mathfrak{B}(X')$ понимается топология, в которой окрестности любой точки $A \in \mathfrak{B}(X')$ образуют множества вида

$$U_A = \{B \in \mathfrak{B}(X') : A \subset B + U; B \subset A + U\},$$

где U — слабая (сильная) окрестность нуля в X' .

Теорема 1. Пусть Q — компакт, P — сублинейный оператор, отображающий банахово пространство X в $C(Q)$.

Тогда существует такое непрерывное в слабой топологии Хаусдорфа отображение $\Phi: Q \rightarrow \mathfrak{B}(X')$, что

$$(Px)(t) = \sup_{l \in \Phi(t)} lx, \quad (1)$$

$$\|P\| = \sup_{t \in Q} \sup_{l \in \Phi(t)} \|l\|. \quad (2)$$

Обратно, если задано такое отображение Φ , то оператор P , определяемый равенством (1), есть сублинейный оператор, отображающий X в $C(Q)$. При этом оператор P компактен в том и только том случае, если Φ непрерывно в сильной топологии Хаусдорфа.

З а м е ч а н и е. Теорема 1 остается справедливой, если компакт Q заменить произвольным топологическим пространством, а $C(Q)$ — пространством $BC(Q)$ ограниченных непрерывных функций.

3. Из теоремы 1 и теоремы Майкла о непрерывных селекторах полунепрерывных снизу отображений $*$ ⁽⁷⁾ и ее обобщений ^(8, 9) получаем

Предложение 1. Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Опорное множество Ω_P сублинейного оператора P не пусто и справедлива формула

$$Px = \sup_{A \in \Omega_P} Ax, \quad (3)$$

где супремум берется в $C(Q)$.

Предложение 2. Множество K_P компактных опорных операторов к компактному сублинейному оператору P не пусто и имеет место (3) (при $\Omega_P = K_P$).

4. Перейдем к внутреннему описанию опорных множеств. Введем некоторые определения, необходимые для формулировки результата об опорных множествах. Множество Λ линейных операторов называется **опорным**, если существует сублинейный оператор P такой, что $\Omega = \Omega_P$. Множество Ω компактных линейных операторов называется **компактно опорным**, если Ω состоит из всех компактных опорных операторов некоторого компактного сублинейного оператора. Отметим, что компактно опорное множество, вообще говоря, не является опорным. Множество Ω линейных операторов $A: X \rightarrow C(Q)$ называется **операторно выпуклым**, если для любых $A_1, A_2 \in \Omega$ и любого оператора B , действующего в $C(Q)$ и удовлетворяющего условию $0 \leq B \leq 1$, где 0 и 1 — соответственно нулевой и тождественный операторы в $C(Q)$, множество Ω содержит оператор $BA_1 + (1 - B)A_2$. Будем говорить, что сеть операторов $A_\alpha: X \rightarrow C(Q)$ диагонально сходится к оператору $A: X \rightarrow C(Q)$, если для каждого $t_0 \in Q$ найдутся сеть $t_\beta \rightarrow t_0$ и подсеть A_α сети A_α такие, что $(A_\alpha x)(t_\beta)$ (как произведение сетей) при любом $x \in X$ сходится к $(Ax)(t_0)$. Множество линейных операторов Ω **полунепрерывно сверху**, если для каждой сети $t_\alpha \rightarrow t_0$, $t_\alpha, t_0 \in Q$, из того, что для любого $x \in X$ сеть $(A_\alpha x)(t_\alpha)$ сходится к $l_0 x$, где $A_\alpha \in \Omega$, $l_0 \in X'$, следует существование оператора $A \in \Omega$ такого, что $(Ax)(t_0) = l_0 x$, $x \in X$.

Теорема 2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Непустое множество Ω линейных операторов $A: X \rightarrow C(Q)$ является опорным тогда и только тогда, когда оно операторно выпукло, полунепрерывно сверху, диагонально замкнуто и ограничено.

З а м е ч а н и е. Простые примеры показывают, что приведенные в теореме условия независимы.

Теорема 3. Непустое множество Ω компактных линейных операторов $A: X \rightarrow C(Q)$ ($\varphi: Q \rightarrow X'$) является компактно опорным тогда и только тогда, когда оно операторно выпукло, полунепрерывно сверху, диагонально замкнуто (в пространстве компактных операторов), ограничено и для каждого $t_0 \in Q$ справедливы соотношения

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \inf_{\varphi_1 \in \Omega} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t_0)\| = 0, \quad (4)$$

$$\limsup_{t \rightarrow t_0} \inf_{\varphi_2 \in \Omega} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t_0)\| = 0. \quad (5)$$

* Многозначное отображение Φ топологического пространства Q в топологическое пространство Y называется полунепрерывным снизу, если для любого открытого множества U в Y множество $\{t \in Q: \Phi(t) \cap U \neq \emptyset\}$ открыто ⁽⁷⁾. Отметим, что для отображений $\Phi: Q \rightarrow \mathfrak{B}(X')$ понятие слабой полунепрерывности снизу совпадает с полунепрерывностью снизу в слабой топологии Хаусдорфа.

З а м е ч а н и е 1. Приведенные в теореме условия можно ослабить. При выполнении соотношений (4), (5) полунепрерывность сверху множества Ω обеспечивается выполнением следующего условия. Если при некотором $t \in Q$ сеть $\varphi_\alpha(t)$, где $\varphi_\alpha \in \Omega$, слабо сходится к какому-то $l \in X'$, то существует $\varphi \in \Omega$ такое, что $\varphi(t) = l$.

З а м е ч а н и е 2. При выполнении соотношений (4), (5) диагональная замкнутость (в пространстве компактных операторов) множества Ω обеспечивается замкнутостью относительно сходимости в следующем смысле: сеть операторов $A_\alpha: X \rightarrow C(Q)$ ($\varphi_\alpha: Q \rightarrow X'$) сходится к оператору $A: X \rightarrow C(Q)$ ($\varphi: Q \rightarrow X'$), если для каждого $t_0 \in Q$ найдутся сеть $t_\beta \rightarrow t_0$ и подсеть $\varphi_{\alpha'}$ сети φ_α такие, что $\varphi_{\alpha'}(t_\beta)$ (как произведение сетей) сильно сходится к $\varphi(t_0)$.

В заключение отметим, что поскольку каждый KB -линеал ограниченных элементов по теореме Крейнов — Какутани может быть реализован в виде пространства непрерывных функций на некотором компакте, то для сублинейных операторов, действующих в KB -линеалы ограниченных элементов, остаются справедливыми предложения 1 и 2. Для этого случая можно получить также описание опорных множеств.

Новосибирский государственный
университет

Поступила
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, Л. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. ² А. Д. Иоффе, В. Л. Левин, Тр. Московск. матем. общ., 26 (1972). ³ В. Л. Левин, ДАН, 194, № 2, 268 (1970). ⁴ Е. М. Никишин, УМН, 25, 6, 129 (1970). ⁵ В. Л. Макаров, А. М. Рубинов, УМН, 25, 5, 125 (1970). ⁶ Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, общая теория, ИЛ, 1962. ⁷ E. Michael, Ann. Math., 2, 63, 361 (1956). ⁸ Michael, Canad. J. Math., 11, 556 (1959). ⁹ В. А. Гейлер, ДАН, 195, 17 (1970).