Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 3

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. И. МАЦАЕВ, Е. З. МОГУЛЬСКИЙ

О ВОЗМОЖНОСТИ СЛАБОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ПОЛНОГО ОПЕРАТОРА ДО ВОЛЬТЕРРОВА

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 19 I 1971)

Будем говорить, что линейный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, является полным, если система его корневых векторов, отвечающих ненулевым собственным числам, полна в $\mathfrak{H}$. Под слабым возмущением полного вполне непрерывного самосопряженного оператора H будем понимать оператор $H(1+S)$, где S — такой вполне непрерывный оператор, что оператор $1+S$ непрерывно обратим.

М. В. Келдыш установил ([1]), что любое слабое возмущение полного самосопряженного оператора $H \in \mathfrak{S}_p$, $p > 0$ *, будет полным оператором. Им же был поставлен следующий вопрос. Существует ли такой полный вполне непрерывный самосопряженный оператор, слабое возмущение которого не будет полным? Мы даем положительный ответ на этот вопрос и указываем широкий класс операторов, для которых слабое возмущение может быть не только неполным, но даже вольтерровым оператором **. А именно имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть занумерованные в порядке убывания с учетом кратностей собственные числа $\{\lambda_j\}_1^\infty$ полного положительного вполне непрерывного оператора H удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_{2n}\cdot\lambda_n^{-1} = 1.$$

Тогда существует слабое возмущение оператора H, являющееся вольтерровым оператором.

Наметим контуры доказательства этой теоремы. Вначале покажем, что оператор можно возмутить так, что собственные числа возмущения приобретут некоторую дополнительную регулярность.

Лемма 1. *У оператора H, удовлетворяющего условиям теоремы, существует слабое возмущение, являющееся полным положительным оператором, собственные числа $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$ которого обладают следующими свойствами·*

$$a_n = a_{-n} > 0; \quad a_n \downarrow 0, \quad n(a_n - a_{n+1}) = o(a_n), \quad |n| \to \infty. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора H и пусть $\mu_n = (\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\ldots\cdot\lambda_n)^{1/n}$. Тогда

$$\lambda_n\cdot\mu_n^{-1} \to 1, \quad n(\mu_n - \mu_{n+1}) = o(\mu_n), \quad n \to \infty.$$

Рассмотрим оператор

$$K = H\left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mu_j - \lambda_j}{\lambda_j}(\cdot, \varphi_j)\varphi_j\right)\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu_{2l} - \mu_{2l+1}}{\mu_{2l+1}}(\cdot, \varphi_{2l+1})\varphi_{2l+1}\right).$$

* Теория классов $\mathfrak{S}_p$ излагается в ([2]). Там же приводится доказательство теоремы М. В. Келдыша.

** Вполне непрерывный оператор называется вольтерровым, если его спектр сосредоточен в точке 0.

Он является слабым возмущением оператора H; его собственному вектору φ_1 отвечает собственное число μ_1, а собственным векторам φ_{2n}, φ_{2n+1} — μ_{2n}, $n = 1, 2, \ldots$ Осталось произвести перенумерацию собственных чисел всеми целыми числами: положим

$$a_0 = \mu_1, \quad a_n = a_{-n} = \mu_{2n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство теоремы. Рассмотрим в $\mathfrak{H}$, которое будем считать реализованным как $L^2(0, 2\pi)$, полный положительный вполне непрерывный оператор P, последовательностью собственных векторов которого является система $\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$, а соответствующей последовательностью собственных чисел — последовательность $\{a_n\}_{-\infty}^{\infty}$, обладающая свойствами (1). Этот оператор унитарно эквивалентен оператору, построенному в лемме 1. Определим далее вполне непрерывный самосопряженный оператор Q следующим образом: полной ортонормированной последовательностью собственных векторов оператора Q является система $\{e^{ix(n+1/2)}\}_{-\infty}^{\infty}$, а соответствующие собственные числа $\{b_n\}_{-\infty}^{\infty}$ связаны с собственными числами оператора P преобразованием Рисса — Титчмарша

$$b_n = \frac{1}{\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty}{}' \frac{a_l}{n - l + 1/2}, \quad -\infty < n < \infty,$$

где штрих означает, что сумма понимается в смысле главного значения. Из условий (1) следует сходимость указанного ряда и тот факт, что $b_n \to 0$, $|n| \to \infty$.

Область значений $R(P)$ оператора P состоит из тех функций $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}$, для которых $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-2} |d_n|^2 < \infty$. После введения нормы равенством

$$\|f\|_1^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{-2} |d_n|^2$$

$R(P)$ превращается в гильбертово пространство, которое будем обозначать через $\mathfrak{H}_1$.

Область значений $R(Q)$ оператора Q состоит из тех функций $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n+1/2)x}$, для которых $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{-2} |c_n|^2 < \infty$ (если $b_k = 0$, то c_k полагаем равным нулю, а в последней сумме соответствующее слагаемое опускается). После введения нормы равенством

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^{-2} |c_n|^2$$

$R(Q)$ превращается в гильбертово пространство.

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что единичный шар $B(Q) \{f\colon \|f\|_2 \leqslant 1\}$ компактен в метрике пространства $\mathfrak{H}_1$ (см. лемму 2).

Так как оператор P изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, то множество $P^{-1}B(Q)$ компактно в $\mathfrak{H}$. Если единичный шар в $\mathfrak{H}$ обозначить через B, то $B(Q) = QB$ и поэтому оператор $M \overset{(\mathrm{def})}{=} P^{-1}Q$ будет вполне непрерывным в $\mathfrak{H}$. Поскольку $Q = PM$, то оператор $A \overset{(\mathrm{def})}{=} P - iQ$ можно представить в виде $P(1 - iM)$.

Дадим теперь для оператора A явное аналитическое описание, из которого будет следовать, что у оператора A ядро тривиально и, значит, он является слабым возмущением оператора P, а следовательно, и оператора H. С этой целью введем в рассмотрение непрерывную [3] функцию

$$\mathcal{H}(x)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\neq 0} n^{-1}a_n e^{inx}.$$

Обозначим далее через D множество тех функций $f\in L^2(0,\,2\pi)$, для которых функция $g(x)=\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{H}(x-t)f(t)\,dt$ абсолютно непрерывна и $g'(x)\in L^2(0,\,2\pi)$. Определим на D оператор P_1 формулой

$$(P_1f)(x)=\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{H}(x-t)\,f(t)\,dt+\frac{a_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(t)\,dt.$$

Этот оператор замкнут и $P_1(e^{inx})=a_ne^{inx}$, $|n|<\infty$.

Таким образом, на плотном в $L^2(0,\,2\pi)$ линейном многообразии D замкнутый оператор P_1 совпадает с ограниченным оператором P. Следовательно, $P_1=P$.

Аналогично показывается, что оператор, задаваемый формулой

$$(Q_1f)(x)=i\frac{d}{dx}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sign}(x-t)\,\mathcal{H}(x-t)\,f(t)\,dt+i\frac{a_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sign}(x-t)\,f(t)\,dt,$$

совпадает с оператором Q. Итак, для оператора A верна формула

$$(Af)(x)=2\frac{d}{dx}\int\limits_0^{x}\Big(\mathcal{H}(x-t)+\frac{a_0}{2\pi}(x-t)\Big)f(t)\,dt.$$

Так как $\mathcal{H}(\pi/m)>0$, $m=2,\,3,\ldots$, [4] *, то на основании теоремы Титчмарша о свертке [5] можно утверждать, что оператор A не имеет нулевого вектора, т. е. что оператор $1-iM$ непрерывно обратим.

Приступим к доказательству того, что оператор A вольтерров. Рассмотрим для этого функцию

$$\mathcal{H}^{(N)}(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}(a_n-a_N)\,e^{inx}$$

и операторы

$$(P^{(N)}f)(x)=\int\limits_0^{2\pi}\mathcal{H}^{(N)}(x-t)\,f(t)\,dt,$$

$$(Q^{(N)}f)(x)=i\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{sign}(x-t)\,\mathcal{H}^{(N)}(x-t)\,f(t)\,dt.$$

Оператор $A^{(N)}$, определенный равенством

$$(A^{(N)}f)(x)=(P^{(N)}-iQ^{(N)})\,f(x)=2\int\limits_0^{x}\mathcal{H}^{(N)}(x-t)\,f(t)\,dt,$$

будет вольтерровым. Так как собственными числами $a_n^{(N)}$ оператора $P-P^{(N)}$ являются числа

$$a_n^{(N)}=\begin{cases}a_N, & |n|\leqslant N,\\ a_n, & |n|>N,\end{cases}$$

то $\|P-P^{(N)}\|\leqslant a_N$. Собственные числа $b_n^{(N)}$ оператора $Q-Q^{(N)}$ связаны с числами $a_n^{(N)}$ преобразованием Рисса — Титчмарша; оказывается, что

* Доказательство леммы 6.6 гл. XII.

$|b_n^{(N)}| \leqslant \mathrm{const}\cdot a_N$, $|n| < \infty$, где const не зависит от N. Следовательно,

$$\|A - A^{(N)}\| \leqslant \|P - P^{(N)}\| + \|Q - Q^{(N)}\| \to 0, \quad N \to \infty,$$

и, значит, оператор A вольтерров ([2]).

Для завершения доказательства должна быть установлена использованная выше

Лемма 2. *Единичный шар $B(Q)\{f\colon \|f\|_2 \leqslant 1\}$ компактен в метрике пространства $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство этой леммы опирается на два справедливых при условии (1) утверждения:

1) $b_n = o(a_n)$, $|n| \to \infty$; 2) оператор Рисса — Титчмарша ограничен в пространстве последовательностей $h = \{h_n\}_{-\infty}^{\infty}$ с нормой

$$\|h\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h_n|^2 a_n^2.$$

Первое утверждение обеспечивает компактность в $\mathfrak{H}_1$ множества функций $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ таких, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 b_n^{-2} \leqslant 1$, а из второго следует непрерывность в $\mathfrak{H}_1$ оператора умножения на $e^{ix/2}$.

Поступило
20 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1965. [3] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1, 1964, стр. 292. [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, 1964, стр. 194. [5] Е. К. Титчмарш, Теория функций, 1951.