Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 5

УДК 517.43+517.94 МАТЕМАТИКА

М. Л. ГОРБАЧУК, А. Н. КОЧУБЕЙ, М. А. РЫБАК

ДИССИПАТИВНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 18 I 1972)

1. В настоящей заметке описываются и изучаются диссипативные краевые задачи на конечном интервале $[a, b]$ для некоторого класса формально самосопряженных дифференциальных уравнений $l[y] = \lambda y$ в гильбертовом пространстве H. Ввиду того, что коэффициентами уравнения могут быть неограниченные операторы, полученные результаты дают возможность найти общий вид диссипативных граничных задач для некоторого класса уравнений с частными производными (например, для уравнения Лапласа).

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (случай конечномерного H) диссипативные граничные задачи изучались в ([1]). Описание всех самосопряженных граничных задач для уравнений рассматриваемого типа (ясно, что они образуют подкласс диссипативных граничных задач) было получено в ([2–5]).

2. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\ \cdot)$, а M_θ — произвольное множество в $H \oplus H$. Говорят, что упорядоченная пара элементов x, x' из H находится в бинарном отношении $\theta = \theta_M$ и пишут $x\,\theta\,x'$, если $\{x, x'\} \in M_\theta$.

Определение. Бинарное отношение θ называется максимально диссипативным (максимально аккумулятивным), если: 1) множество M_θ линейно; 2) если $x\,\theta\,x'$, то $\mathrm{Im}(x', x) \geqslant 0$ $(\mathrm{Im}(x', x) \leqslant 0)$; 3) если для отношений θ и θ_1 выполнены условия 1) и 2) и $\theta_1 \supset \theta$, т. е. из $x\,\theta\,x'$ следует, что $x\,\theta_1\,x'$, то $\theta_1 = \theta$. В том случае, когда $\mathrm{Im}(x, x') = 0$ для $x\,\theta\,x'$, максимально диссипативное (аккумулятивное) отношение θ будем называть максимально симметрическим.

Если в $H \oplus H$ ввести индефинитное скалярное произведение $[X, Y] = (IX,\ Y)_{H\oplus H}(X = \{x,\ x'\},\ Y = \{y,\ y'\})$, где $I = \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{pmatrix}$ (E — тождественный оператор), то максимальная диссипативность, аккумулятивность, симметричность отношения θ означает, что M_θ является соответственно максимальным неотрицательным, максимальным неположительным и максимальным нейтральным подпространством в $H \oplus H$ (см., например, ([6])).

Если для симметрического отношения θ соответствующее ему нейтральное подпространство M_θ является одновременно максимальным неположительным и максимальным неотрицательным, от отношение θ_M называется эрмитовым.

Теорема 1. *Каково бы ни было сжатие K (определенный на всем H линейный оператор с $\|K\| \leqslant 1$), уравнения*

$$(K - E)x' + i(K + E)x = 0, \tag{1}$$

$$(K - E)x' - i(K + E)x = 0 \tag{2}$$

определяют соответственно максимально диссипативное и максимально аккумулятивное бинарные отношения в H.

Обратно, всякое максимально диссипативное (аккумулятивное) отношение в H представимо в виде (1) ((2)), *где сжатие K определяется отношением однозначно. Максимально диссипативное (аккумулятивное) отношение является максимально симметрическим тогда и только тогда, когда в представлении* (1) ((2)) *оператор K изометрический; оно является эрмитовым тогда и только тогда, когда K унитарен.*

Заметим, что эрмитовые бинарные отношения были введены и описаны уравнением вида (1) в ([3]).

3. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(H, (a, b))$ — гильбертово пространство вектор-функций со значениями в H и со скалярным произведением

$$\langle x, y\rangle = \int_a^b (x(t), y(t))\,dt.$$

Рассмотрим в $\mathfrak{H}$ дифференциальное выражение

$$l[y] = -y'' + Ay, \tag{3}$$

где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H (можно считать $A \geqslant E$). Построим по оператору A шкалу гильбертовых пространств $H_\tau(-1 \leqslant \tau \leqslant 1)$ ([4]). Оператор A изометрически действует из H_1 в H. Тогда сопряженный к нему оператор $\tilde{A}$, действующий из H в H_{-1}, является расширением оператора A. Обозначим $\tilde{l}[y] = -y'' + \tilde{A}y$.

На множестве D_0' элементов вида $y(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) f_k, \qquad f_k \in D(A)$, $\varphi_k(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(a, b)$ определим симметрический оператор L_0': $L_0'y = l[y]$, $y \in D_0'$. Обозначим L_0 замыкание в $\mathfrak{H}$ оператора L_0'. Расширение $\tilde{L}$ оператора L_0 в $\mathfrak{H}$ называется диссипативным (аккумулятивным) (см. ([7])), если $\operatorname{Im}\langle\tilde{L}y, y\rangle \geqslant 0$ ($\operatorname{Im}\langle\tilde{L}y, y\rangle \leqslant 0$) для всех $y \in D(\tilde{L})$. Диссипативное (аккумулятивное) расширение $\tilde{L}$ называется максимальным, если оно не имеет в $\mathfrak{H}$ собственных диссипативных (аккумулятивных) расширений.

Сопоставим каждой вектор-функции $y(t) \in D(L_0^*)$ пару векторов

$$\begin{aligned} Y &= \{\tilde{A}^{-1/4}y(a), -\tilde{A}^{-1/4}y(b)\},\\ Y' &= \{\tilde{A}^{1/4}[y'(a) + \tilde{A}^{1/2}y(a)], \ \tilde{A}^{1/4}[y'(b) - \tilde{A}^{1/2}y(b)]\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Как показано в ([4]), Y и $Y' \in H \oplus H$. Имеет место

Теорема 2. *Каково бы ни было сжатие K в $H \oplus H$, краевые условия*

$$(K - E)Y' + i(K + E)Y = 0, \tag{5}$$

$$(K - E)Y' - i(K + E)Y = 0 \tag{6}$$

определяют в $\mathfrak{H}$ соответственно максимальное диссипативное и максимальное аккумулятивное расширения оператора L_0.

Обратно, всякое максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора L_0 порождается в $\mathfrak{H}$ операцией $\tilde{l}[y]$ и краевым условием вида (5) ((6)). *Максимальные симметрические расширения L_0 в $\mathfrak{H}$ описываются условиями* (5) *и* (6), *в которых K — изометрический оператор. Эти условия задают самосопряженное расширение тогда и только тогда, когда K унитарен.*

4. Обозначим через $R_\lambda(\tilde{L}_K)$ резольвенту максимального диссипативного (аккумулятивного) расширения $\tilde{L}_K$ оператора L_0, соответствующего граничному условию (5) ((6)).

Теорема 3. *Предположим, что в выражении* (3) *оператор A имеет дискретный спектр. Для того чтобы $R_\lambda(\tilde{L}_K)$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$ в случае диссипативного $\tilde{L}_K$ и $\operatorname{Im}\lambda > 0$ в случае аккумулятивного $\tilde{L}_K$) была вполне непрерывным оператором в пространстве $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы* *оператор $K-E$ был вполне непрерывным в $H\oplus H$. Если, кроме того, $A^{(-2p-1)/(2p)}\in\mathfrak{S}_p$ в H, где $\mathfrak{S}_p$, $p\geqslant 1$,— идеалы Неймана — Шэттена (см. ([8])), то для того чтобы $R_\lambda(\tilde{L}_K)\in\mathfrak{S}_p$ в $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы $K-E\in\mathfrak{S}_p$ в $H\oplus H$.*

Как показано в ([4]), вектор-функция $y(t)\in D(L_0^*)$ непрерывна в пространстве $H_{3/4}$ внутри интервала (a, b), а на замкнутом интервале $[a, b]$ она непрерывна только в пространстве $H_{-1/4}$. Если же $y(t)\in D(L_0)$, то она непрерывна на $[a, b]$ в $H_{3/4}$.

Назовем максимальное диссипативное расширение $\tilde{L}_k$ оператора L_0 j-гладким, $-1/4<j\leqslant 3/4$, если всякая вектор-функция $y(t)\in D(\tilde{L}_k)$ непрерывна на $[a, b]$ в пространстве H_j.

Теорема 4. *Для того чтобы максимальное диссипативное расширение $\tilde{L}_K$ оператора L_0 было j-гладким, необходимо и достаточно, чтобы оператор $\hat{A}^{j+1/4}(K-E)$ был непрерывным в $H\oplus H$, где $\hat{A}^j=\begin{pmatrix}A^j & 0\\ 0 & A^j\end{pmatrix}$.*

Если оператор A имеет дискретный спектр, то, как вытекает из теорем 3 и 4, резольвента всякого j-гладкого максимального диссипативного (аккумулятивного) расширения $\tilde{L}_K$ является вполне непрерывным оператором в $\mathfrak{H}$.

Назовем квадратичным функционалом для операции (3) выражение вида

$$D(y)=\int_a^b[\|y'(t)\|^2+\|A^{1/2}y(t)\|^2]\,dt.$$

Очевидно, что для любой вектор-функции $y(t)\in D(L_0)$ $D(y)<\infty$. Однако квадратичный функционал $D(y)$ определен не для всех $y(t)\in\in D(L_0^*)$. Если на $y(t)$ он не определен, то будем полагать $D(y)=\infty$.

Будем говорить, что $\tilde{L}_K$ является максимальным диссипативным (аккумулятивным) расширением оператора L_0 с конечным квадратичным функционалом, если $D(y)<\infty$ для любой вектор-функции $y(t)\in D(\tilde{L}_K)$. Если, кроме того, $\langle\tilde{L}_K y, y\rangle=D(y)$ для любой $y(t)\in D(\tilde{L}_K)$, то расширение $\tilde{L}_K$ называется D-расширением (см. ([9])).

Теорема 5. *Для того чтобы максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение $\tilde{L}_K$ оператора L_0 было с конечным квадратичным функционалом, необходимо и достаточно, чтобы оно было $1/4$-гладким. $\tilde{L}_K$ является D-расширением в том и только в том случае, когда*

$$(K^*-E)A(K-E)+i(K^*-E)(K+E)=0.$$

Отметим, что для самосопряженных расширений оператора L_0 теоремы 2, 3, 4, 5 были получены в ([4], [10], [11]).

5. Рассмотрим в $\mathfrak{H}$ дифференциальное выражение порядка $m=2n$ вида

$$l[y]=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\{(p_{n-k}y^{(k)})^{(k)}-i[(q_{n-k}y^{(k)})^{(k-1)}+(q_{n-k}y^{(k-1)})^{(k)}]\}+p_ny, \tag{7}$$

где все операторные коэффициенты при каждом фиксированном $t\in[a, b]$ являются самосопряженными ограниченными операторами и непрерывно зависят от t со своими производными до порядка $n-k$ включительно, причем $p_0^{-1}(t)$ существует и ограничен при $t\in[a, b]$. Определим для выражения (7) квазипроизводные $y^{[k]}$ формулами

$$y^{[j]}=y^{(j)},\ j=0, 1, \ldots, n-1;\qquad y^{[n]}=p_0y^{(n)}-iq_0y^{(n-1)},$$

$$y^{[n+k]}=-\frac{d}{dt}y^{[n+k-1]}+p_ky^{(n-k)}+i[q_{k-1}y^{(n-k+1)}-q_ky^{(n-k-1)}],$$

$$k=1, \ldots, n;\qquad q_n\equiv 0;\qquad l[y]\equiv y^{[2n]}.$$

Пусть L — оператор, порожденный выражением $l[y]$ на множестве D всех $y(t) \in \mathfrak{H}$ с $m-1$ абсолютно непрерывными производными таких, что $l[y] \in \mathfrak{H}$, и пусть L_0 — сужение L, определенное условиями

$$y_a = y_a^{[1]} = \ldots = y_a^{[m-1]} = y_b = y_b^{[1]} = \ldots = y_b^{[m-1]} = 0,$$

где $y_a{}^{[k]} = y^{[k]}(a)$, $y_b{}^{[k]} = y^{[k]}(b)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Тогда L_0 — симметрический оператор и $L_0{}^* = L$ (см. ([3])).

Обозначим $H^m = \underbrace{H \oplus \ldots \oplus H}_{m}$. Каждой вектор-функции $y(t) \in D$ сопоставим пару векторов $Y, Y' \in H^m$:

$$\begin{aligned} Y &= \{y_a, y_a', \ldots, y_a^{(n-1)};\ y_b, y_b', \ldots, y_b^{(n-1)}\}, \\ Y' &= \{y_a^{[2n-1]}, y_a^{[2n-2]}, \ldots, y_a^{[n]};\ -y_b^{[2n-1]}, -y_b^{[2n-2]}, \ldots, -y_b^{[n]}\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Пользуясь результатами работы ([3]), получим, что для выражения (7) все максимальные диссипативные (аккумулятивные) расширения оператора L_0 задаются граничными условиями (5) ((6)), в которых Y и Y' определяются формулами (8). Аналогичный результат имеет место также для дифференциального выражения нечетного порядка.

Заметим, что самосопряженные расширения как в четном, так и в нечетном случае описаны в ([3]).

Используя результаты работы ([5]), таким же способом можно получить описание всех максимальных диссипативных (аккумулятивных) граничных задач для выражения $l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + Ay$, где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
8 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Olubummo, Trans. Am. Math. Soc., **129**, № 1 (1967). [2] М. Г. Крейн, Матем. сборн., **21**, 3, 365 (1947). [3] Ф. С. Рофе-Бекетов, ДАН, **184**, № 5 (1969). [4] М. Л. Горбачук, Функц. анализ и его приложения, **5**, в. 1 (1971). [5] М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей, ДАН, **201**, № 5 (1971). [6] М. Г. Крейн, Введение в теорию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летн. матем. школа, **1**, Киев, 1965. [7] А. В. Штраус, Изв. АН СССР, сер. матем., **32**, в. 1 (1968). [8] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [9] М. М. Гехтман, ДАН, **186**, № 6 (1969). [10] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Функц. анализ и его приложения, **5**, в. 4 (1971). [11] В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Укр. матем. журн., **24**, № 3 (1972).