Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 2

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

В. М. ШУРЕНКОВ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ С НЕПРЕРЫВНЫМ ФАЗОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 30 III 1972)

Обозначим R_+^m множество всех вещественных m-мерных векторов $x = (x^1, \ldots, x^m)$ с неотрицательными координатами. Рассмотрим марковскую последовательность в R_+^m

$$\xi_n = (\xi_n^1, \ldots, \xi_n^m), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Будем говорить, что ξ_n — векторный ветвящийся процесс, если

$$M[e^{-(\lambda, \xi_n)} \mid \xi_{n-1} = x] = e^{-(x, K(\lambda))},$$

где

$$x, \lambda \in R_+^m, \quad (x, \lambda) = \sum_{i=1}^m x^i \lambda^i.$$

$$K(\lambda) = (K^1(\lambda), \ldots, K^m(\lambda)).$$

$K^j(\lambda)$ — взятый со знаком минус логарифм преобразования Лапласа некоторого безгранично делимого распределения в R_+^m.

Обозначим

$$|\lambda| = \sum_{i=1}^m |\lambda^i|, \quad e_j = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j-1}, 1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-j}).$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$D(\lambda) = \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda^i} K^j(\lambda) \right\|_{i, j=1, \ldots, m}.$$

$$M = \lim_{|\lambda| \to 0} D(\lambda), \quad A = \lim_{|\lambda| \to \infty} D(\lambda).$$

E — единичная матрица.

Будем предполагать, что матрица M конечна и некоторая ее степень положительна. Здесь и в дальнейшем все неравенства между векторами и матрицами следует понимать покомпонентно.

Обозначим

$$q^j = P\{\lim_{n \to \infty} \xi_n = 0 \mid \xi_0 = e_j\}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1. 1) *Вектор* $q = (q^1, \ldots, q^m)$ *удовлетворяет уравнению*

$$q = K(q); \tag{1}$$

2) *для существования решения* $q = (q^1, \ldots, q^m)$ *уравнения* (1) *такого, что* $q \neq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы все последовательные главные миноры матрицы* $E - A$ *были положительны и среди последовательных главных миноров матрицы* $E - M$ *нашелся отрицательный. Если такое решение* q *существует, то оно единственно и* $q > 0$.

Обозначим ρ и γ максимальные по модулю вещественные положительные собственные числа матриц M и A соответственно, $\varkappa$ — аналогичное число матрицы $D(q)$, где q — единственное положительное решение уравнения (1), если такое существует.

Теорема 2. 1) *Если* $\gamma \geqslant 1$, *то* $|\xi_n| \to \infty$ *с вероятностью единица*;

2) *если* $\rho \leqslant 1$, *то* $|\xi_n| \to 0$ *с вероятностью единица*;

3) *если* $\gamma < 1 < \rho$, *то выполнены условия существования и единственности положительного решения* $q = (q^1, \ldots, q^m)$ *уравнения* (1), *и, если* $\xi_0 = e_j$, *то* $|\xi_n| \to 0$ *с вероятностью* e^{-q^j} *и* $|\xi_n| \to \infty$ *с вероятностью* $1 - e^{-q^j}$.

Теорема 3. *Если* $\gamma < 1 < \rho$, *то* $\varkappa < 1$ *и*

$$1)\ P\{\xi_n \leqslant x \,|\, \xi_0 = e_j, \lim_{k\to\infty} \xi_k = 0, \xi_n \geqslant \varepsilon\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\varepsilon^x B_j(dy) \Big/ \int_\varepsilon^\infty B_j(dy)$$

(*сходимость имеет место для* $x \geqslant \varepsilon > 0$ *из некоторого плотного в* R_+^m *множества*), *где символ* $\int_\varepsilon$ *обозначает, что интегрирование ведется по множеству*

$$\{y \in R_+^m\colon \varepsilon \leqslant y \leqslant x\},$$

а мера B_j *такова, что*

$$B_j(R_+^m \setminus \{y\colon y \leqslant \varepsilon\}) < \infty$$

для всякого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in R_+^m$;

2) *преобразование Лапласа*

$$\beta_j(\lambda) = \int_{R_+^m} e^{-(\lambda, x)} B_j(R_+^m \setminus \{y\colon y \leqslant x\})\, dx$$

существует при $\lambda > 0$. *Функция* $\alpha_j(\lambda) = \lambda^1 \ldots \lambda^m \beta_j(\lambda)$ *удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\alpha_j(K(\lambda + q) - q) = \varkappa \alpha_j(\lambda).$$

Обозначим $u = (u^1, \ldots, u^m)$ положительный собственный вектор матрицы M с собственным числом ρ, $Mu = \rho u$ и $v = (v^1, \ldots, v^m)$ — положительный собственный вектор транспонированной матрицы M' с собственным числом ρ, $M'v = \rho v$, $(u, v) = 1$.

Теорема 4. *Если* $\rho = 1$ *и* $\dfrac{\partial^2}{\partial\lambda^i \partial\lambda^j} K^r(\lambda)|_{\lambda=0} > -\infty$, *то*

$$P\{\xi_n/n \leqslant x \,|\, \xi_0 = e_j, \xi_n \notin S(\varepsilon)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\{\zeta \leqslant x\}$$

(*сходимость имеет место для* $x, \varepsilon > 0$ *из некоторого плотного в* R_+^m *множества*), *где* $S(\varepsilon) = \{y\colon y \leqslant \varepsilon\}$, $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^m)$ — *случайный вектор в* R_+^m *такой, что*

$$P\{\zeta^j \leqslant x^j\} = 1 - e^{-b^j x^j}$$

и $\zeta^1 / v^1 = \ldots = \zeta^m / v^m$ *с вероятностью единица*,

$$\frac{1}{b^j} = \frac{1}{2} v^j \sum_{r,k,i} v^r \sigma_{ki}^r u^k u^i,$$

$$\sigma_{ki}^r = -\frac{\partial^2}{\partial\lambda^k \partial\lambda^i} K^r(\lambda)\Big|_{\lambda=0}.$$

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
7 III 1972