

В. П. ПЕТРЕНКО

О ВЕЛИЧИНАХ ОТКЛОНЕНИЙ ЦЕЛЫХ КРИВЫХ НИЖНЕГО ПОРЯДКА $\lambda < 1$

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 5 IV 1972)

1. Пусть C_p — p -мерное комплексное унитарное пространство, $\mathbf{a}$ — векторы из C_p , A — фиксированная допустимая система векторов этого пространства (т. е. любые p различных векторов из системы A являются линейно независимыми). Рассмотрим p фиксированных линейно независимых трансцендентных функций $g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z)$.

О п р е д е л е н и е. Вектор-функция

$$G(z) = (g_1(z), g_2(z), \dots, g_p(z))$$

пространства R_p называется p -мерной целой кривой ⁽¹⁻⁴⁾.

В работах ⁽¹⁻³⁾ построена теория распределения значений целых кривых, являющаяся полным аналогом неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций. Напомним лишь некоторые обозначения этой теории, необходимые нам далее.

Неванлинновской характеристикой целой кривой $G(z)$ называется

$$T(r, G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \|G(re^{i\theta})\| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta + 0, \quad (1)$$

где

$$u(z) = \max_{1 \leq k \leq p} \ln |g_k(z)| = \ln |g_{\alpha(z)}(z)|, \quad \alpha(z) = 1, 2, 3, \dots, p.$$

Порядок ρ и нижний порядок λ целой кривой $G(z)$ вводим обычным способом.

Неванлинновская функция приближения $m(r, \mathbf{a}, G)$ и функция числа $N(r, \mathbf{a}, G)$ определяются так:

$$m(r, \mathbf{a}, G) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\|G(re^{i\theta})\| \cdot \|\mathbf{a}\|}{|(G(re^{i\theta}) \cdot \mathbf{a})|} d\theta;$$

$$N(r, \mathbf{a}, G) = \int_0^r [n(t, \mathbf{a}, G) - n(0, \mathbf{a}, G)] d \ln t + n(0, \mathbf{a}, G) \ln r,$$

где $n(t, \mathbf{a}, G)$ — число корней скалярного произведения

$$(G(z) \cdot \mathbf{a})$$

в круге $|z| \leq t$ ($\mathbf{a} \in A$). Пусть

$$\delta(\mathbf{a}, G) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, \mathbf{a}, G)}{T(r, G)}.$$

Величина $\delta(\mathbf{a}, G)$ называется дефектом целой кривой $G(z)$ в смысле Р. Неванлинны. Известно, что для любой фиксированной допустимой си-

$$\sum_{a \in A} \delta(a, G) \leq p.$$

С другой стороны, для исследования роста мероморфных функций в равномерной метрике на $[0, 2\pi]$ в работах ⁽⁵⁻⁸⁾ введены и исследованы свойства соответствующих характеристик. При этом получены соотношения, вполне аналогичные соотношениям неванлинновской теории. Заметим, что с этой точки зрения оказалось возможным исследовать рост не только мероморфных, но и Q -псевдомероморфных функций ⁽⁹⁻¹¹⁾. Одной из основных характеристик роста мероморфных и Q -псевдомероморфных функций в равномерной метрике является величина отклонения $\beta(a, f)$ функции $f(z)$ от числа a . В работе ⁽¹²⁾ введена величина отклонения $\beta(a, G)$ целой кривой $G(z)$ от вектора a . Напомним это определение. Положим для $a \in A$

$$L(r, a, G) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} \ln \frac{\|G(re^{i\theta})\| \cdot \|a\|}{|(G(re^{i\theta}) \cdot a)|} = \ln \frac{\|G(re^{i\theta(a)})\| \cdot \|a\|}{|(G(re^{i\theta(a)}) \cdot a)|},$$

$$\beta(a, G) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{L(r, a, G)}{T(r, G)}.$$

Определение. Величину $\beta(a, G)$ назовем величиной отклонения целой кривой $G(z)$ от вектора a . Если для некоторого вектора $a \in A$ $\beta(a, G) > 0$, то будем говорить, что целая кривая $G(z)$ имеет положительное отклонение от вектора a .

Приведем один результат о свойствах величин отклонений целых кривых, установленный в работе ⁽¹³⁾.

Теорема. Если целая кривая $G(z)$ имеет конечный нижний порядок λ , тогда

а) для любого вектора $a \in A$

$$\beta(a, G) \leq \begin{cases} \frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \lambda < 0,5, \\ \pi\lambda, & \lambda \geq 0,5; \end{cases} \quad (1,1)$$

$$(1,2)$$

б) множество

$$\Omega_A(G) = \{a \in A : \beta(a, G) > 0\}$$

не более чем счетно.

Оценки (1,1) и (1,2) точные.

Если $f(z)$ — мероморфная функция нижнего порядка $\lambda < 1$ и множество

$$\Omega(f) = \{a : \beta(a, f) > 0\}$$

содержит более одной точки, тогда при любых a и b (см. (7))

$$\beta(a, f) + \beta(b, f) \leq \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \cdot [2 - \delta(a, f) - \delta(b, f)]. \quad (1,3)$$

В этой работе получен аналог оценки (1,3) для целых кривых.

Занумеруем векторы $a \in \Omega_A(G)$ в порядке невозрастания величин отклонений

$$\beta(a_k, G) \geq \beta(a_{k+1}, G), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если нижний порядок целой кривой $G(z)$ $\lambda < 1$, тогда

$$\beta(a_p, G) \leq \pi\lambda \operatorname{tg} \frac{\pi\lambda}{2} \cdot \left[p - \sum_{k=1}^p \delta(a_k, G) \right]. \quad (1,4)$$

Следствие 1. Для целых кривых нулевого нижнего порядка множество $\Omega_A(G)$ содержит самое большее $p - 1$ вектор.

Это аналог теоремы Ж. Валирона ⁽¹³⁾ для мероморфных функций нулевого нижнего порядка.

Следствие 2. Для дефектов и величин отклонений целых кривых нулевого нижнего порядка справедливы соотношения

$$\sum_{a \in A} \delta(a, G) \leq p - 1, \quad \sum_{a \in A} \beta(a, G) \leq p - 1. \quad (1,5)$$

Точность оценок (1,4) и (1,5) характеризует следующая

Теорема 2. Для любого λ , $0 < \lambda \leq 0,5$, существует целая кривая $G_\lambda(z)$ нижнего порядка λ , для которой

$$\beta(a_{p-1}, G_\lambda) = \beta(a_p, G_\lambda) = \frac{1}{2} \pi \lambda \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2} \sum_{k=1}^p [1 - \delta(a_k, G_\lambda)].$$

Существует целая кривая $G_0(z)$ нулевого нижнего порядка, для которой

$$\delta(a_k, G_0) = \beta(a_k, G_0) = 1 \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, p - 1$$

и

$$\delta(a_k, G_0) = \beta(a_k, G_0) = 0 \quad \text{при } k \geq p.$$

2. При доказательстве теоремы 1 используется специальное представление мероморфных функций нижнего порядка $\lambda < 1$ (см. (7)), а также общие факты теории целых кривых (см., (1-3)).

3. **Замечание.** Пусть $G(z)$ — целая кривая нижнего порядка $\lambda \leq 0,5$ и a_k — векторы из фиксированной допустимой системы A . Пусть $\{a_k\} \subset \Omega_A(G)$ занумерованы в порядке невозрастания величин отклонений $\beta(a_k, G)$. Вероятно, если (ср. теорема 1 из (7))

$$\beta(a_{p-1}, G) \geq \pi \lambda \operatorname{tg} \frac{\pi \lambda}{2} \left[p - \sum_{k=1}^{p-1} \delta(a_k, G) \right], \quad \lambda > 0,$$

то множество $\Omega_A(G)$ содержит лишь $p - 1$ вектор $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
14 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Cartan, *Mathematica*, 7, № 5 (1933). ² L. Ahlfors, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 3, № 4, 1 (1941). ³ H. Weyl, *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Princeton, 1943. ⁴ А. А. Гольдберг, Г. Виттих, *Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям*, М., 1960. ⁵ В. П. Петренко, *ДАН*, 184, № 5, 1031 (1969). ⁶ В. П. Петренко, *Изв. АН СССР*, 33, № 2, 414 (1969). ⁷ В. П. Петренко, *ДАН*, 187, № 1, 40 (1969). ⁸ В. П. Петренко, *ДАН*, 189, № 4, 718 (1969). ⁹ В. П. Петренко, *ДАН*, 196, № 1, 50 (1971). ¹⁰ В. П. Петренко, *Сибирск. матем. журн.*, 13, № 3, 531 (1972). ¹¹ В. П. Петренко, *Тез. докл. Всесоюз. конфер. по теории функций комплексного переменного*, Харьков, 1971. ¹² В. П. Петренко, М. Хуссейн, *Тез. докл. Всесоюз. конфер. по теории функций комплексного переменного*, Харьков, 1971. ¹³ G. Valiron, *C. R.*, 230, 40 (1950).