

Ю. В. РАКИТСКИЙ

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 11 IV 1972)

Обычно в качестве независимой переменной при численном интегрировании выбирают аргумент исходной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тогда система m дифференциальных уравнений первого порядка аппроксимируется системой m разностных уравнений, причем разность двух последовательных значений аргумента не зависит от свойств решаемой системы.

Можно использовать другую методику, при которой система дифференциальных уравнений первого порядка аппроксимируется системой $m + 1$ разностных уравнений и разность между двумя последовательными значениями аргумента, вычисляемая одним из разностных уравнений, определяется свойствами этой системы. Такую методику естественно называть параметрической. Незначительное усложнение процесса численного интегрирования компенсируется выигрышем в точности.

Рассмотрим задачу Коши

$$dz_i / dt = f_i(t, z_1, \dots, z_m), \quad z_i(t_0) = z_{i0}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Предполагается, что решение системы (1) $z(t) = \{z_1(t), \dots, z_m(t)\}$ существует в замкнутой выпуклой по z области $\Pi = \{|t| \leq T, |z_i(t) - z_i| \leq R\}$.

Введем скалярную функцию $\varphi(t, z_1, \dots, z_m) > 0$, $(t, z) \in \Pi$. Пусть (1) заменяется системой разностных уравнений

$$t_{n+1} = t_n + h \sum_{\chi=-1}^r b_\chi \varphi_{n-\chi}; \quad z_{in+1} = z_{in} + h \sum_{\chi=-1}^r b_\chi f_{in-\chi} \varphi_{n-\chi}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

где h — достаточно малое положительное число,

$$\begin{aligned} \sum_{\chi=-1}^r b_\chi &= 1, \quad f_{in-\chi} = f_i(t_{n-\chi}, z_{1n-\chi}, \dots, z_{mn-\chi}), \\ \varphi_{n-\chi} &= \varphi(t_{n-\chi}, z_{1n-\chi}, \dots, z_{mn-\chi}), \quad z_n = \text{colon} \{z_{1n}, \dots, z_{mn}\}, \\ \chi &= -1, 0, 1, \dots, r; \quad i = 1, \dots, m; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Дополнительные начальные значения для (2)

$$\begin{aligned} z_{i(-\chi)}, t_{-\chi}, f_{i(-\chi)} &= f_i(t_{-\chi}, z_{1(-\chi)}, \dots, z_{m(-\chi)}), \\ \varphi_{-\chi} &= \varphi(t_{-\chi}, z_{1(-\chi)}, \dots, z_{m(-\chi)}), \quad \chi = 1, 2, \dots, r, \end{aligned}$$

можно вычислять методами расчета начала таблицы ⁽¹⁾.

При $h \rightarrow 0$ (2) переходит в систему дифференциальных уравнений

$$dt / dx = \varphi(t, z_1, \dots, z_m), \quad t|_{x=0} = t_0, \quad (3)$$

$$dz_i / dx = f_i(t, z_1, \dots, z_m) \varphi(t, z_1, \dots, z_m), \quad z_i|_{x=0} = z_{i0},$$

которая эквивалентна (1).

Сформулируем теоремы о решениях, доставляемых параметрической методикой.

Теорема 1. Если: а) вектор-функция $f(t, z)$ и скалярная функция $\varphi(t, z)$ принадлежат классу C^{s+2} в области Π ;

б) $(t_n, z_n) \in \Pi$;

в) метод (2) имеет степень $s \geq 2$, т. е. выполнены условия (1)

$$B_1 = \sum_{k=1}^r \sum_{x=k}^r b_x - b_{-1}, \quad \frac{B_\gamma}{\gamma} = \sum_{k=1}^r \sum_{x=k}^r b_x (-k)^{\gamma-1}; \quad \gamma = 2, \dots, s-1.$$

где B_γ — числа Бернулли ($B_1 = -1/2, B_2 = 1/6, B_3 = 0, \dots$);

г) ошибка округления, допускаемая на каждом шаге решения, $\Gamma_n = O(h^{s+3})$;

д) дополнительные начальные значения для (2) удовлетворяют условиям

$$\left. \frac{d^{\gamma} j_{-k} \varphi_{-k}}{dh^{\gamma}} \right|_{h=0} = (-k)^{\gamma} \frac{d^{\gamma} j \varphi}{dx^{\gamma}} \Big|_{x=0}, \quad \left. \frac{d^{\gamma} \varphi_{-k}}{dh^{\gamma}} \right|_{h=0} = (-k)^{\gamma} \frac{d^{\gamma} \varphi}{dx^{\gamma}} \Big|_{x=0} \quad (4)$$

(в формулах (4) переменная x есть независимая переменная системы уравнений (3)),

то приближенное решение, доставляемое рекуррентным процессом (2), для всех $n \geq 0$ определяется асимптотическим разложением

$$z_n = z(t_n) + h^s u(t_n) \int_{t_0}^{t_n} u^{-1}(t) \varphi^{-1}(t, z) \left\{ C_s \left[-f(t, z) \frac{d^s \varphi(t, z)}{dx^s} + \frac{d^s j(t, z) \varphi(t, z)}{dx^s} \right] + \right. \\ \left. + C_{s+1} h \left[-f(t, z) \frac{d^{s+1} \varphi(t, z)}{dx^{s+1}} + \frac{d^{s+1} j(t, z) \varphi(t, z)}{dx^{s+1}} \right] \right\} dt + O(h^{s+2}), \quad h \rightarrow 0. \quad (5)$$

Здесь $z(t_n)$ — точное решение (1) при $t = t_n$,

$$C_j = \frac{B_j}{j!} + \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=1}^r \left(\sum_{x=k}^r b_x - 1 \right) (-k)^{j-1}, \quad j = s, s+1;$$

матричная функция $u(t)$ ($m \times m$) определена уравнением

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial z} u, \quad u(t_0) = E, \quad (6)$$

где E — единичная матрица ($m \times m$) и обозначена матрица

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_l} \right) = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad i, l = 1, \dots, m.$$

Замечание 1. Если для вычисления дополнительных начальных значений в системе (2) применить методы, рекомендуемые в работе (1), то в формуле (5) появится дополнительное слагаемое вида $h^s u(t) (v_s + h v_{s+1})$, где v_s, v_{s+1} — постоянные векторы; формула (5) имеет место при $n > 2r$.

Теорема 2. Если: а) вектор-функция $f(t, z)$ и скалярная функция $\varphi(t, z)$ принадлежат классу C^2 в области Π ;

б) решение системы (1) вычисляется следующим методом:

$$t_{n+1} = t_n + h \varphi(t_n, z_n), \\ z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n) \varphi(t_n, z_n); \quad (7)$$

в) $(t_n, z_n) \in \Pi$;

г) $\Gamma_n = O(h^3)$,

то для рекуррентного процесса (7) имеет место асимптотическая формула ($h \rightarrow 0$):

$$z_n = z(t_n) - \frac{h}{2} u(t_n) \int_{t_0}^{t_n} u^{-1}(\tau) \varphi(\tau, z) \frac{df(\tau, z)}{d\tau} d\tau + O(h^2), \quad (8)$$

где $U(t)$ определяется (6).

Замечание 2. Из формул (5) и (8) следует, что функцию $\varphi(t, z)$ можно для повышения точности численного интегрирования выбрать в виде

$$\varphi(t, z) = \left\{ 1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^p a_j \left(\frac{d^j f_i}{dt^j} \right)^2 \right\}^{-q^2}, \quad a_j \geq 0,$$

при этом величина $t_{n+1} - t_n$ регулируется в процессе решения. Очевидно, возможны и другие формы $\varphi(t, z)$, определяемые особенностями системы уравнений (1).

Рассмотрим пример. Пусть скалярное уравнение

$$dz/dt = f(z), \quad z(0) = z_0, \quad f(z_0) = f_0 \quad (9)$$

решено методом (7) при $\varphi = [1 + f^2(z)]^{-1}$. Тогда, согласно формуле (8), получается оценка погрешности:

$$z_n - z(t_n) = -\frac{h}{4} f(z(t_n)) \ln \frac{f^2(z(t_n))(1 + f_0^2)}{[1 + f^2(z(t_n))] f_0^2} + O(h^2), \quad h \rightarrow 0. \quad (10)$$

Если для решения (9) применить метод ломаных Эйлера по обычной методике

$$z_{N+1} = z_N + Hf(z_N), \quad z(0) = z_0,$$

то оценка погрешности имеет вид

$$z_N - z(t_N) = -\frac{H}{2} f(z(t_N)) \ln \frac{f(z(t_N))}{f(z_0)} + O(H^2), \quad H \rightarrow 0. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11), видим преимущество параметрической методики.

В заключение отметим принципиальное отличие параметрической методики от метода выбора оптимальных сеток (2^*) .

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
10 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. В. Ракитский, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, 1, 13 (1968).
² А. Н. Тихонов, А. Д. Горбунов, там же, 4, 2, 232 (1964). ³ А. Н. Тихонов, С. С. Гайсарян, там же, 9, 5, 1015 (1969). ⁴ С. С. Гайсарян, там же, 10, 2, 465 (1970).