

Я. М. БАРЗДИНЬ, Р. В. ФРЕЙВАЛД
О ПРОГНОЗИРОВАНИИ ОБЩЕРЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 III 1972)

1. Некоторые аспекты проблемы прогнозирования функций (под названием «идентификация функций в пределе» (limiting identification)) были изучены Э. М. Голдом (¹, ²). Эти исследования были продолжены в работах (³, ⁴) и др. В некотором смысле к этой задаче могут быть отнесены также и работы по расшифровке автоматов (см. (⁵)). Одним из авторов (⁶) была изучена задача прогнозирования поведения конечных автоматов, когда об автоматах заранее не дано никакой информации. В настоящей статье рассматривается задача прогнозирования общерекурсивных (о.р.) функций. Устанавливаются некоторые характеристики конечнопрогнозируемых классов о.р. функций и выводятся оценки числа ошибок, возникающих в процессе прогнозирования.

2. Пусть U — некоторый класс одноместных о.р. функций. Каждая функция $f(x)$ этого класса рассматривается как «черный ящик», на вход которого подается бесконечная последовательность натуральных чисел (входная последовательность)

$$\Omega = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t, \dots\}$$

и который выдает соответственно последовательность

$$\{f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_t), \dots\}.$$

В настоящей статье изучаются следующие три задачи прогнозирования:

А. Для любого момента t по паре $\{\xi_1, \dots, \xi_t, \xi_{t+1}\}$, $\{f(\xi_1), \dots, f(\xi_t)\}$ определить следующее значение функции — $f(\xi_{t+1})$.

Б. Пусть заранее фиксирована некоторая гёделевская (т. е. главная (⁷)) нумерация τ класса всех одноместных частично рекурсивных (ч.р.) функций. Для любого момента t по паре

$$\{\xi_1, \dots, \xi_t\}, \quad \{f(\xi_1), \dots, f(\xi_t)\} \quad (*)$$

требуется определить гёделевский номер самой функции f или какой-нибудь другой функции, которая на элементах последовательности Ω неотличима от f (такой гёделевский номер будем называть Ω -гёделевским номером функции f).

В. Пусть заранее фиксирована некоторая вычислимая нумерация α класса U (в данном случае мы предполагаем, что класс U является эффективно перечислимым). Для любого момента t по паре $(*)$ требуется определить α -номер функции f или какой-нибудь другой функции, которая на элементах последовательности Ω неотличима от f (такой номер будем называть Ω - α -номером функции f).

Ясно, что безошибочные решения этих задач в общем случае невозможны.

3. В качестве средств прогнозирования мы будем использовать любые вычислимые арифметические функции вида $F(x, y)$, называемые стратегиями. Будем считать, что каждой конечной последовательности $\{x_1, \dots, x_t\}$ натуральных чисел эффективно сопоставлен ее номер

* Говоря о нумерациях, мы имеем в виду, что в качестве номеров использованы все натуральные числа.

$\langle x_1, \dots, x_t \rangle$. Под гипотезой, порожденной стратегией F в момент t при прогнозировании f на Ω , будем понимать: для задачи A — значение $F(\langle \xi_1, \dots, \xi_t, \xi_{t+1} \rangle, \langle f(\xi_1), \dots, f(\xi_t) \rangle)$, для задачи B и B — значение $F(\langle \xi_1, \dots, \xi_t \rangle, \langle f(\xi_1), \dots, f(\xi_t) \rangle)$. Пусть $F(x, y)$ — о.р. стратегия. $F^A(\Omega, f)$ — число различных t , при которых $F(\langle \xi_1, \dots, \xi_t, \xi_{t+1} \rangle, \langle f(\xi_1), \dots, f(\xi_t) \rangle) \neq f(\xi_{t+1})$; $F^B(\Omega, f)$ и соответственно $F^B(\Omega, f)$ — число различных гипотез, которые порождает стратегия F при прогнозировании f на Ω , при условии, что существует такой момент t_0 , после которого F порождает только одну и ту же гипотезу, равную Ω -гёделевскому номеру (соответственно Ω - α -номеру) функции f ; если такое t_0 не существует, то положим $F^B(\Omega, f) = \infty$ (соответственно $F^B(\Omega, f) = \infty$).

Наряду с о.р. стратегиями мы будем рассматривать также и ч.р. стратегии. В случае, когда $F(x, y)$ — ч.р. функция, величины $F^A(\Omega, f)$, $F^B(\Omega, f)$, $F^B(\Omega, f)$ определим так же, как и выше, с той лишь разницей, что в случае, когда при каком-нибудь t $F(\langle \xi_1, \dots, \xi_t, \xi_{t+1} \rangle, \langle f(\xi_1), \dots, f(\xi_t) \rangle)$ не определено (соответственно $F(\langle \xi_1, \dots, \xi_t \rangle, \langle f(\xi_1), \dots, f(\xi_t) \rangle)$ не определено), положим $F^A(\Omega, f) = \infty$ (соответственно $F^B(\Omega, f) = \infty$, $F^B(\Omega, f) = \infty$).

4. Класс U назовем о.р. конечно прогнозируемым в смысле λ ($\lambda = A, B, B$), если существует о.р. стратегия F такая, что для любой входной последовательности Ω и для любой функции $f \in U$ $F^A(\Omega, f) < \infty$. В случае, когда наряду с о.р. стратегиями мы будем допускать также ч.р. стратегии, будем говорить, что класс U ч.р. конечно прогнозируем (или, просто, конечно прогнозируем). Уже в работе ⁽¹⁾ отмечается (только в других терминах), что класс всех о.р. функций не является конечно прогнозируемым. Поэтому возникает вопрос: какие классы функций конечно прогнозируемы?

Теорема 1. *Класс U о.р. конечно прогнозируем в смысле A тогда и только тогда, когда он содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р. функций.*

Заметим, что достаточность условий теоремы 1 очевидна: в качестве такой стратегии можно брать стратегию, которая в качестве гипотез перебирает по порядку все функции класса U , пока доходит до искомой. Так же легко видеть, что любой класс U , который содержится в эффективно перечислимом классе о.р. функций, о.р. конечно прогнозируем и в смысле B . Однако имеет место

Теорема 2. *Существует класс U о.р. функций, который о.р. конечно прогнозируем в смысле B и который не содержится ни в каком эффективно перечислимом классе о.р. функций.*

Из этой теоремы вытекает отрицательный ответ на вопрос, поставленный в ⁽¹⁾: верно ли, что каждый идентифицируемый в пределе класс о.р. функций содержится в некотором эффективно перечислимом классе о.р. функций?

Из теорем 1 и 2 видно, что множество классов функций, о.р. конечно прогнозируемых в смысле B , шире множества классов функций, о.р. конечно прогнозируемых в смысле A . Однако в случае ч.р. конечной прогнозируемости ситуация меняется.

Теорема 3. *Совпадают следующие множества классов о.р. функций:*

- 1) множество классов, ч.р. конечно прогнозируемых в смысле A ,
- 2) множество классов, ч.р. конечно прогнозируемых в смысле B ,
- 3) множество классов, о.р. конечно прогнозируемых в смысле B .

Далее, легко убедиться, что если класс U о.р. конечно прогнозируем в смысле B (в смысле B), то он также и конечно прогнозируем в смысле B (соответственно в смысле B) с помощью примитивно рекурсивной стратегии.

5. Теперь изучим величины $F^A(\Omega, f)$, $F^B(\Omega, f)$ и $F^B(\Omega, f)$. Пусть U — эффективно перечислимый класс о.р. функций и α — вычислимая нумерация этого класса. Положим $F_{U, A, \alpha}(\Omega, n) = \max F^A(\Omega, f)$, $F_{U, B, \alpha}(\Omega, n) =$

$= \max F^B(\Omega, f)$, $F_{U, \alpha}^B(\Omega, f) = \max F^B(\Omega, f)$, где $\max$ берется по всем $f \in U$, которые имеют α -номера, не превосходящие n .

Простой перебор всех функций по порядку дает верхние оценки порядка n для этих величин. Однако в случаях A и B можно построить существенно более экономные стратегии. Через Ω^0 мы обозначим естественную последовательность натуральных чисел: $0, 1, 2, \dots$

Теорема 4*. Для любого эффективно перечислимого класса U о.р. функций и любой вычислимой нумерации α этого класса существует о.р. стратегия F такая, что для любой входной последовательности Ω

$$F_{U, \alpha}^A(\Omega, n) \leq \log_2 n + o(\log_2 n).$$

Существуют эффективно перечислимый класс U о.р. функций и вычислимая нумерация α этого класса такие, что для любой стратегии F

$$F_{U, \alpha}^A(\Omega^0, n) \geq \log_2 n - O(1).$$

Из первого утверждения теоремы 4 вытекает

Следствие. Для любого эффективно перечислимого класса U о.р. функций и любой вычислимой нумерации α этого класса существует о.р. стратегия F такая, что для любой входной последовательности Ω

$$F_{U, \alpha}^B(\Omega, n) \leq \log_2 n + o(\log_2 n).$$

Теорема 5. Существуют эффективно перечислимый класс U о.р. функций и вычислимая нумерация α этого класса такие, что для любой стратегии F

$$F_{U, \alpha}^B(\Omega^0, n) \geq \log_2 n - O(1).$$

6. В случае задачи B , так же как и в случае задачи B , имеет место тривиальная оценка $F_{U, \alpha}^B(\Omega, n) \leq n$.

Теорема 6. Существуют эффективно перечислимый класс U о.р. функций, вычислимая нумерация α этого класса и входная последовательность Ω такие, что для любой стратегии F

$$F_{U, \alpha}^B(\Omega, n) \geq n.$$

Оказывается, что в случае задачи B оценки существенно меняются, когда вместо детерминированных стратегий рассматриваются вероятностные стратегии. Под вероятностными стратегиями мы понимаем стратегии (точнее, машины, реализующие эти стратегии), которые в процессе своей работы используют двоячное случайное устройство (бернуллиев датчик) с вероятностью $p = 1/2$ появления единицы и с вероятностью $q = 1/2$ появления нуля (более точное определение вероятностных машин см., например, в ⁽⁸⁾). Итак, пусть F — вероятностная стратегия. Обозначим через $F^B(\Omega, f)$ случайную величину, равную числу различных гипотез, порожденных стратегией F при прогнозировании f на Ω , если существует такой момент t_0 , после которого F порождает только одну и ту же гипотезу, равную Ω - α -номеру функции f (в противном случае данная величина равна ∞).

Теорема 7. Для любого эффективно перечислимого класса U о.р. функций и любой вычислимой нумерации α этого класса существует вероятностная стратегия F такая, что для любой входной последовательности Ω

$$\min_{f \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}} P \{F^B(\Omega, f) < \log_2 n\} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

7. Из теоремы 5 и следствия теоремы 4 следует, что существует эффективно перечислимый класс U и вычислимая нумерация α класса U (это U

* Более слабая формулировка теоремы 4 содержится в ⁽¹⁰⁾.

и α из теоремы 5), для которых имеется асимптотически наилучшая стратегия прогнозирования (в смысле величины $F_{U, \alpha}^B(\Omega, n)$). Возникает вопрос: выполняется ли аналогичное свойство для любого эффективно перечислимого класса U и любой вычислимой нумерации α ? Следующая теорема показывает, что ответ на этот вопрос отрицательный, т. е. здесь имеет место ситуация, аналогичная той, которая была обнаружена М. Блюмом⁽⁹⁾ для сложностей вычислений.

Теорема 8. *Существует эффективно перечислимый класс U о.р. функций и вычислимая нумерация α этого класса такие, что выполняется следующее свойство: какую бы о.р. функцию $r(x)$ мы ни брали, для любой ч.р. стратегии F , конечно прогнозирующей класс U в смысле B (в смысле B), существует о.р. стратегия F такая, что для всех n , начиная с некоторого,*

$$r(\tilde{F}_{U, \alpha}^B(\Omega^0, n)) \leq F_{U, \alpha}^B(\Omega^0, n)$$

(соответственно $r(\tilde{F}_{U, \alpha}^B(\Omega^0, n)) \leq F_{U, \alpha}^B(\Omega^0, n)$).

П р и м е ч а н и е. При доказательстве теоремы 8 в качестве U можно брать класс функций, реализуемых на конечных автоматах.

В качестве нумерации α можно брать любую нумерацию конечных автоматов, характеризуемую тем, что по диаграмме автомата можно эффективно найти его номер, α по номеру — его диаграмму. (Под автоматами и диаграммами здесь понимаются автоматы и диаграммы с фиксированным начальным состоянием).

Вопрос о том, имеет ли место аналог теоремы 8 в случае прогнозирования в смысле A , остается открытым.

8. Как уже было сказано, класс всех о.р. функций не является ч.р. конечно прогнозируемым. Рассмотрим ситуацию, когда об о.р. функции $f(x)$ дополнительно известна верхняя оценка n ее минимального гёделевского номера. Эта ситуация внешне напоминает задачу расшифровки конечных автоматов в случае, когда известна верхняя оценка числа состояний. Нетрудно убедиться, что в данном случае *эффективно по n , $n = 1, 2, \dots$, можно построить ч.р. стратегию F_n , которая конечно прогнозирует в смысле A любую о.р. функцию $f(x)$, имеющую гёделевский номер не больше n , и $F_n^A(\Omega, f) \leq n$. Можно показать, что при подходящей гёделевской нумерации и $\Omega = \Omega^0$ эта оценка не ниже, чем n/c , где c — не зависящая от n константа.* Если отбросить требование эффективности F_n по n , то, как легко видеть, верхняя оценка величины $F_n^A(\Omega, f)$ может быть понижена до $\log_2 n$.

Теоремы 4 и 7 доказаны Р. В. Фрейвалдом и Я. М. Барздином, остальные теоремы — Я. М. Барздином.

Вычислительный центр
Латвийского государственного
университета им. П. Стучки
Рига

Поступило
2 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ E. M. Gold, J. Symbolic Logic, 30, № 1, 28 (1965). ² E. M. Gold, Information and Control, 10, 447 (1967). ³ J. A. Feldman, J. Gips et al., Technical Report № CS 125, Comp. Sci. Dept. Stanford Univ., 1969. ⁴ J. A. Feldman, Artificial Intelligence Memorandum, Computer Science Dept., Stanford University, 1969. ⁵ Б. А. Трахтенброт, Я. М. Барздин, Конечные автоматы (поведение и синтез), «Наука», 1970. ⁶ Я. М. Барздин, ДАН, 190, № 5, 1048 (1970). ⁷ В. А. Успенский, Лекции о вычислимых функциях, 1960. ⁸ К. Леу, Э. Мур и др., Сборн. Автоматы, ИЛ, 1956, стр. 242. ⁹ M. Blum, Assoc. Comp. Mach., 14, № 2, 322 (1967). ¹⁰ J. M. Barzdin, Prognostication of Automata and Functions, IFIP Congress 74, TA-2, North Holland, 1974, p. 180.