Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 519. 21 МАТЕМАТИКА

В. В. АНИСИМОВ

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ПОЛУМАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА С РАСЩЕПЛЯЮЩИМСЯ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 28 II 1972)

Пусть $\varkappa_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, — полумарковский процесс (п.м.п.) со счетным множеством состояний I, который задается набором независимых в совокупности случайных величин $\{\tau_\varepsilon(k, l),\ k, l \in I\}$ и вложенной цепью Маркова $P_\varepsilon = \|p_\varepsilon(k, l)\|$, $k, l \in I$ (ε — параметр серии).

Предположим, что матрице $P = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon$ соответствует конечное количество возвратных классов $I_1, I_2, \ldots, I_r$ $\left(\bigcup\limits_{k=1}^{r} I_k = I\right)$. Разобьем множество состояний I процесса $\varkappa_\varepsilon(t)$ на подмножества $I_1, I_2, \ldots, I_r$. Рассмотрим некоторый процесс $\widetilde{\varkappa}_\varepsilon(t)$, состояния которого получаются склеиванием состояний из I_k в одно состояние, т. е. при всех $t \geqslant 0$:

$$\widetilde{\varkappa}_\varepsilon(t) = \{k, \text{ если } \varkappa_\varepsilon(t) \in I_k,\ k = 1, \ldots, r\}.$$

Процесс $\widetilde{\varkappa}_\varepsilon(t)$ в общем случае не будет полумарковским. Изучим условия, при которых этот процесс сходится к некоторому п.м.п. (условия сходимости цепи Маркова с непрерывным временем рассматривались в ([1])).

Обозначим

$$\widetilde{P}_\varepsilon(k) = \|\widetilde{p}_\varepsilon^{(k)}(l, j)\|, \quad l, j \in I_k, \quad k = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

где $\widetilde{p}_\varepsilon^{(k)}(l, j) = p_\varepsilon(l, j)\left(1 - \sum\limits_{i \notin I_k} p_\varepsilon(l, i)\right)^{-1}$.

Перенумеруем состояния следующим образом: $I_k = \{1^{(k)}, 2^{(k)}, \ldots\}$, $k = 1, \ldots, r$, и пусть $\rho_\varepsilon^{(k)}(l)$, $l \in I_k$ — математическое ожидание числа попаданий в состояние $\{l\}$ между двумя последовательными попаданиями в состояние $\{1^{(k)}\}$ для цепи с матрицей $\widetilde{P}_\varepsilon(k)$, $k = 1, \ldots, r$, причем $\rho_\varepsilon^{(k)}(1^{(k)}) = 1$ (если цепь имеет стационарное распределение $q_\varepsilon^{(k)}(l)$, $l \in I_k$, то, как известно, $\rho_\varepsilon\ (l) = q_\varepsilon^{(k)}(1^{(k)})^{-1} q_\varepsilon^{(k)}(l)$, $l \in I_k$). Положим

$$u_\varepsilon(k, l) = \sum_{m \in I_k} \rho_\varepsilon^{(k)}(m) \sum_{i \in I_l} p_\varepsilon(m, i),$$

$$k,\ l = 1, \ldots, r,\ k \neq l,\ u_\varepsilon(k, k) = 0,$$

$$u_\varepsilon(k) = \sum_{l=1}^{r} u_\varepsilon(k, l), \quad k = 1, \ldots, r.$$

Предположим, что для каждого $k = 1, \ldots, r$

$$u_\varepsilon(k) \neq 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(k) = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} u_\varepsilon(k)^{-1} \sum_{m > N} \rho_\varepsilon^{(k)}(m^{(k)}) \sum_{i \notin I_k} p_\varepsilon(m^{(k)}, i) = 0, \tag{3}$$

и, кроме того, для всех $k, n = 1, \ldots$ [illegible] $\neq 0$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} u_\varepsilon(k, n)^{-1} \sum_{m\in I_k} \rho_\varepsilon \ldots \sum \ldots = 1 \quad (4)$$

Отметим, что условия (3) и (4) имеют [illegible] вероятностный смысл: пусть $\varkappa_\varepsilon(0) = i \in I_k$ и $\chi_\varepsilon(k)$ — случайная [illegible] указывающая номер того состояния из I_k, через которое [illegible] из I_k, а $\chi_\varepsilon(k, n)$ — величина, указывающая номер состояния [illegible] через которое произошло попадание в I_n после выхода из I_k в том случае, [illegible] процесс перешел в I_n. Тогда из (3) и (4) следует, что величины [illegible] и $\chi_\varepsilon(k, n)$ соответственно будут иметь собственное предельное распределение.

Пусть

$$\widetilde{p}(k, j) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(k)^{-1} u_\varepsilon(k, j) \quad k, j = 1, \ldots, r, \quad (5)$$

а матрице $\widetilde{P} = \|\widetilde{p}(k, j)\|$, $k, j = 1, \ldots, r$, соответствует d существенных классов $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \ldots, \langle d\rangle$ и, возможно, несущественные состояния (здесь $\widetilde{p}(k, j)$ — предел вероятности того, что процесс $\varkappa_\varepsilon(t)$, находясь вначале в подмножестве I_k, после выхода из него перейдет сразу в I_j). Обозначим

$$\varphi_\varepsilon(l, m, s) = M \exp\{-s\beta_\varepsilon\tau_\varepsilon(l, m)\}, \quad l, m \in I, \quad s \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Пусть при каждом* $\varepsilon > 0$, $k = 1, \ldots, r$ *цепи с матрицей* $\widetilde{P}_\varepsilon(k)$ *соответствует один возвратный класс, выполнено* (2)—(4) *и существует нормирующий множитель* β_ε *такой, что*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(k)^{-1}(1 - \varphi_\varepsilon(l, m, s)) = a_{lm}(s), \quad (6)$$

если $l, m \in I_k$, $k = 1, \ldots, r$ (*здесь* $0 \leqslant a_{lm}(s) < \infty$);

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(l, m, s) = \overline{\varphi}_{lm}(s), \quad \overline{\varphi}_{lm}(0+) = 1, \quad (7)$$

если $l \in I_k$, $m \notin I_k$, $k = 1, \ldots, r$, *и, кроме того, для каждого* k, $k = 1, \ldots$ $\ldots, r$,

$$A_k(s) = \sum_{l, m\in I_k} \overline{\rho}^{(k)}(l)\, \overline{p}(l, m)\, a_{lm}(s) < \infty, \quad (8)$$

причем в каждом классе $\langle i\rangle$ *из семейства* $\langle 1\rangle, \langle 2\rangle, \ldots, \langle d\rangle$ *существует состояние* $j_i \in \langle i\rangle$ *такое, что* $A_{j_i}(s) \neq 0$, *для любого* $l^{(k)} \in I_k$, $l = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, r$,

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} u_\varepsilon(k)^{-1} \sum_{n>N} p_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(k)})\,(1 - \varphi_\varepsilon(l^{(k)}, n^{(k)}, s)) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} u_\varepsilon(k)^{-1} \sum_{l>N} \rho_\varepsilon(l)^{(k)} \sum_{n\in I_k} p_\varepsilon(l^{(k)}, n)\,(1 - \varphi_\varepsilon(l^{(k)}, n, s)) = 0 \quad (10)$$

(*здесь* $\overline{\rho}^{(k)}(l)$ *и* $\overline{p}(l, m)$ — *пределы величин* $\rho_\varepsilon^{(k)}(l)$ *и* $p_\varepsilon(l, m)$ *соответственно*).

Тогда при любом начальном состоянии $\varkappa_\varepsilon(0) = n^{(i)} \in I_i$ *процесс* $\varkappa_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t)$, $t \geqslant 0$, *сходится* (*в смысле слабой сходимости конечномерных распределений*) *к п.м.п.* $\overline{\varkappa}(t)$, $t \geqslant 0$, *с множеством состояний* $\{1, 2, \ldots, r\}$, *который задается вложенной цепью* $\widetilde{P}$ (*см.* (5)) *и набором времен переходов* $\{\tau(k, j), k, j = 1, \ldots, r\}$, *причем* $\varkappa(0) = i$, *а*

$$M \exp\{-s\tau(k, j)\} = (1 + A_k(s))^{-1}\psi_{kj}(s), \quad k, j = 1, \ldots, r,$$

где

$$\psi_{kj}(s) = \widetilde{p}(k, j)^{-1} \sum_{m\in I_k} \sum_{l\in I_j} \hat{p}(m, l)\,\overline{\varphi}_{ml}(s),$$

а

$$\hat{p}(m, l) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(k)^{-1} \rho_\varepsilon^{(k)}(m)\, p_\varepsilon(m, l),$$

$$m \in I_k, \quad l \in I_i, \quad k \neq j$$

(*если* $\tilde{p}(k, j) = 0$, *положим* $\psi_{kj}(s) = 1$).

Замечание 1. Если $\tilde{p}(k, j) \neq 0$, но $A_k(s) = 0$ и $\psi_{kj}(s) = 1$, то переход из $\{k\}$ в $\{j\}$ происходит мгновенно с вероятностью $\tilde{p}(k, j)$. Если же все переходы из $\{k\}$ мгновенны, то само $\{k\}$ мгновенно, т. е. процесс сидит в нем нулевое время.

Замечание 2. Если $\psi_{kj}(s) = 1$ и $A_k(s) = a_k s$, $0 \leqslant a_k < \infty$, для всех $k, j = 1, \ldots, r$, то аппроксимирующий процесс будет цепью Маркова с непрерывным временем. Это согласуется с результатами В. С. Королюка ([1], [2]).

Более простой вид результаты будут иметь в том случае, если I конечно. Ограничимся для простоты случаем, когда матрице $\widetilde{P}$ соответствует один существенный класс. Тогда имеет место

Теорема 2. *Если множество состояний процесса* $\varkappa_\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, *конечно, расщепляется на подмножества* $I_1, I_2, \ldots, I_r$, *каждое из которых образует s-множество (см.* ([3], [4])), *матрице* $\widetilde{P} = \|\tilde{p}(k, j)\|$, $k, j = 1, \ldots, r$, *соответствует один существенный класс, где*

$$\widetilde{p}(k, j) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\sum_{l\in I_k} \sum_{m\notin I_k} \widetilde{q}_\varepsilon^{(k)}(l)\, p_\varepsilon(l, m)\Big)^{-1} \sum_{n\in I_k} q_\varepsilon^{(k)}(n) \sum_{i\in I_j} p_\varepsilon(n, i),$$

а $\tilde{q}_\varepsilon^{(k)}(l)$ — *стационарное распределение для цепи с матрицей* $\widetilde{P}_\varepsilon(k)$ (*см.* (1)) *и, выполнены условия* (6), (7), *причем существует* k *такое, что* $A_k(s) \neq 0$, *то процесс* $\widetilde{\varkappa}_\varepsilon(\beta_\varepsilon^{-1}t)$, $t \geqslant 0$, *сходится к п.м.п.* $\varkappa(t)$, $t \geqslant 0$, *с вложенной цепью* $\widetilde{P}$ *и временами переходов* $\{\tau(k, j), k, j = 1, \ldots, r\}$ (*здесь в соответствующих выражениях для* $A_k(s)$ *и* $\psi_{kj}(s)$ *величины* $\rho_\varepsilon^k(l)$ *заменяются величинами* $\tilde{q}_\varepsilon^{(k)}(l)$.

Доказательство теорем использует результаты работ ([4], [5]).

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Поступило 22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. В. Гусак, В. С. Королюк, Теория вероятн. и матем статистика, в. 5 (1971). [2] В. С. Королюк, Укр. матем. журн., № 6 (1969). [3] В. В. Анисимов, Теория вероятн. и матем. статистика, в. 4 (1971). [4] В. В. Анисимов, ДАН, **193**, № 4 (1970). [5] В. В. Анисимов, ДАН, **203**, № 4 (1972).