

Л. М. КУРШИН, Л. И. ШКУТИН

К ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧ О ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 13 XII 1971)

Широкое применение в последние годы получила общая теория устойчивости тонких оболочек, наиболее полное изложение которой дано в монографии (¹). Отличие этой теории от классической заключается в том, что она не использует предположения о безмоментности докритического состояния равновесия оболочки, считая его в общем случае моментным. Влияние моментности на устойчивость передается через дополнительные (по отношению к безмоментным) усилия и через изменения первоначальных кривизн срединной поверхности оболочки, достигающие значительной величины в окрестностях опорных устройств и скачкообразного изменения нагрузок.

Полученные к настоящему времени решения задач устойчивости с учетом моментности докритического состояния на основе линейных уравнений свидетельствуют о том, что степень влияния моментности зависит от граничных условий и в особенности от характера докритического напряженного состояния, вызываемого действующей на оболочку нагрузкой. При наличии распределенных по всей оболочке усилий критические значения нагрузки, найденные с учетом и без учета моментности, сравнимы друг с другом во всей практически реализуемой области значений геометрических параметров (^{2, 3}). Если же распределение усилий имеет локальный характер, то одно значение от другого может отличаться в несколько раз. Так, в задачах об устойчивости при нагреве полубесконечной цилиндрической оболочки, шарнирно соединенной на торце с холодной жесткой диафрагмой, значения параметра τ в формуле для критического перепада температур $\theta = \tau \mu^2 / \alpha$ ($\mu = \sqrt{2C/R}$, $C = h / \sqrt{12(1 - \nu^2)}$, h и R — толщина и радиус оболочки, ν и α — коэффициенты поперечного и температурного расширения), полученные с учетом моментности докритического состояния, лежат в пределах 34,6—40,5 (⁴⁻⁶). Решение тех же задач без учета докритического искривления образующих дает для τ значения 8,56—8,85. При ступенчатом изменении температуры по длине цилиндрической оболочки соответствующие пределы равны 29,8—34,3 и 7,28—7,82 (^{4, 6-9}). В аналогичной задаче для сферической оболочки имеем 35,5—40,5 и 10,4—12,1 (^{6, 7, 10}). Во всех этих задачах эффект, вызываемый докритическим искривлением образующих, очень велик и его учет приводит к увеличению критического значения параметра τ в 3,5—4,5 раза. Наиболее ранняя попытка такого учета сделана в (¹¹).

Анализируя причины столь большого влияния докритического искривления образующих на устойчивость оболочки с локальными напряжениями, нельзя не заметить того, что к моменту потери устойчивости углы поворота образующих в напряженной зоне становятся весьма большими. В связи с этим уместно поставить вопрос: в какой мере линейная теория пригодна для описания докритического напряженного состояния, имеющего локальный характер? Ответ на этот вопрос может быть дан лишь с позиций нелинейной теории. В такой более общей постановке

рассмотрим одну из характерных задач устойчивости оболочек с локальными напряжениями.

Пусть полубесконечная круговая цилиндрическая оболочка нагружена на свободном торце поперечным сжимающим усилием Q . Нелинейная краевая задача о симметричной деформации оболочки сводится к системе двух уравнений относительно функций $\varphi(t)$ и $\chi(t)$

$$\varphi^{(2)} + 2\chi - \mu^2 \chi (\varphi^{(2)} \chi + \varphi^{(1)} \chi^{(1)}) = 0, \quad \chi^{(2)} - 2\varphi = 0, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

с граничными условиями

$$\varphi = q, \quad \chi^{(1)} = 0, \quad t = 0; \quad \varphi = \chi = 0, \quad t = \infty.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi &= -2AN_1^0/(\mu^3 \sin \vartheta), \quad \chi = \sin \vartheta/\mu, \quad t = \int_0^x \cos \vartheta dx, \\ \varphi^{(1)} &= 2AN_2^0/(\mu^2 \cos \vartheta), \quad \chi^{(1)} = R d\vartheta/ds, \quad x = s/\sqrt{2CR}, \\ q &= 2AQ/\mu^3, \quad A = 1/(Eh); \end{aligned}$$

координата s отсчитывается вдоль деформированной образующей, ϑ — угол поворота образующей, N_1^0 , N_2^0 — докритические тангенциальные усилия в оболочке, верхний индекс в круглых скобках показывает порядок производной по t .

С использованием экспоненциальных рядов ⁽¹²⁾ строим решение этой задачи, которое во втором приближении имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= -qe^{-t}[(2 - 30p) \cos t - 17p \sin t + pe^{-2t}(27 \sin 3t + 62 \cos t + \\ &\quad + 34 \sin t)], \\ \chi^{(1)} &= qe^{-t}[17p \cos t + (2 - 30p) \sin t + pe^{-2t}(3 \cos 3t - 14 \cos t + 2 \sin t)], \\ t &= x - 5p[3 - e^{-2x}(2 + \cos 2x + \sin 2x)], \quad p = \mu^2 q^2 / 20. \end{aligned}$$

Первое приближение дает известное линейное решение

$$\varphi_0 = qe^{-x}(\cos x - \sin x), \quad \chi_0 = -qe^{-x}(\cos x + \sin x).$$

Деформированная цилиндрическая оболочка является оболочкой вращения. С учетом локального характера выпучивания уравнения устойчивости можно записать в виде, предлагаемом теорией пологих оболочек ⁽¹⁾. Вводя в эти уравнения для функции усилий ψ и прогиба w представления

$$\psi = -A^{-1}C \sum v_n(x) \exp(iny), \quad w = \sum w_n(x) \exp(iny),$$

приходим к системе (индекс n опускаем)

$$\begin{aligned} \nabla_y^2 \nabla_y^2 v + 2(1 - \mu^2 \chi_0^2) w'' - 2\chi^{(1)}(\gamma^2 w + \mu^2 \chi_0 w') &= 0, \\ \nabla_y^2 \nabla_y^2 w - 2(1 - \mu^2 \chi_0^2) v'' + 2\chi^{(1)}(\gamma^2 v + \mu^2 \chi_0 v') + \\ + 2\mu^2 \varphi_0 \chi_0 w'' + 2\varphi^{(1)} \sqrt{1 - \mu^2 \chi_0^2}(\gamma^2 w + \mu^2 \chi_0 w') &= 0. \end{aligned}$$

где

$$\nabla_y^2 = \frac{d^2}{dx^2} - \mu^2 \chi_0 \frac{d}{dx} - \gamma^2, \quad \gamma = \mu n.$$

Штрихами обозначены производные по x . На крае $x = 0$ для возмущенного состояния задаем условия шарнирного опирания (u_2 — окружное перемещение, M_1 — меридиональный изгибающий момент)

$$N_1 = u_2 = w = M_1 = 0.$$

Задача об определении критического значения параметра нагрузки q^* и соответствующего ему значения параметра волнообразования γ^* бы-

ла решена в конечных разностях методом матричной прогонки ⁽¹³⁾. При $\mu = 0$, что соответствует линейаризации уравнений докритического состояния оболочки, получен следующий результат: $q^* = 32,7$, $\gamma^* = 4,9$. Учет нелинейности докритического состояния приводит к зависимости величин q^* и γ^* от параметра μ . Численные значения этих величин для ряда значений μ и абсолютные значения критического угла поворота ϑ^* при $x = 0$ приводятся ниже. Линейные уравнения дают $\vartheta^* = \mu q^*$.

μ	0,005	0,010	0,015	0,020	0,025	0,026	0,027
γ^*	4,85	4,8	4,7	4,6	4,4	4,45	4,5
q^*	32,5	31,9	30,9	30,1	29,9	30,1	30,7
ϑ^*	0,162	0,315	0,451	0,572	0,685	0,710	0,740

Как видим, учет нелинейности не так уж существенно сказывается на величине критической нагрузки. Однако он позволяет обнаружить

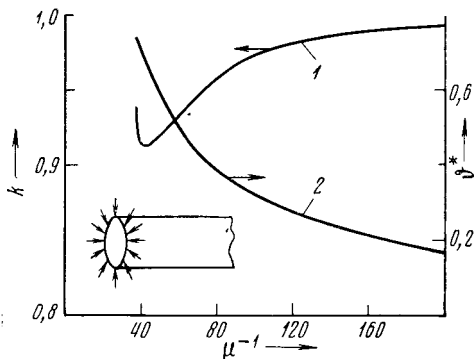


Рис. 1

такое значение геометрического параметра μ , которое ограничивает область существования критической нагрузки. В рассматриваемой задаче исчезновение критической нагрузки произошло при $\mu = \mu_0 \approx 0,0273$. С ростом μ происходит сближение корней характеристического определителя до полного их слияния при $\mu = \mu_0$.

Представление об отличии результатов, отвечающих постановке с учетом нелинейности докритического состояния (когда $q^* = q^*(\mu)$) и постановке с линейаризацией ($q^* = q^*(0)$) дает рис. 1, где кривой 1 показано отношение

$k = q^*(\mu) / q^*(0)$. Кривая 2 определяет значения величины ϑ^* , отвечающие нелинейной задаче. Решению с линейаризацией докритического состояния отвечает прямая $k = 1$. Еще более упрощенная постановка, когда докритическое искривление образующих вообще не учитывается, дает $q^* = 8,5$ и $\gamma^* = 1,4$.

Рассмотренная задача устойчивости оболочки, нагруженной кольцевой силой, эквивалентна задаче об устойчивости при нагреве оболочки, шарнирно соединенной на торце с диафрагмой. Значение параметра τ в формуле для критической температуры равно критическому значению параметра нагрузки q .

Приведенные здесь результаты позволяют сделать вывод о том, что решения задач локальной устойчивости с линейаризацией докритического состояния являются асимптотически точными при $\mu \rightarrow 0$, однако они пригодны лишь для весьма тонких оболочек (в рассмотренной задаче при $R/h \geq 800$).

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
22 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Х. М. Муштар, К. З. Галимов, Нелинейная теория гибких оболочек, Казань, 1957.
2. B. Almgroth, AIAA J., 4, № 1 (1966).
3. В. И. Мяченков, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 6 (1970).
4. В. И. Мяченков, Л. А. Пахомова, Инж. журн., Мех. тверд. тела, № 2 (1968).
5. Ю. В. Липовцев, там же, № 5 (1968).
6. Ю. И. Бадрухин, В. В. Кабанов, Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 3 (1969).
7. А. А. Кожевников, там же, № 5 (1969).
8. Ю. В. Липовцев, там же, № 3 (1970).
9. В. И. Мяченков, А. А. Репин, там же, № 4 (1970).
10. В. Ф. Грибанов, Н. М. Смирнов, Прикл. мех., 3, № 6 (1967).
11. Л. М. Куршин, Тепло-вые напряжения в элементах конструкций, 3, Киев, 1963.
12. А. В. Погорелов, К теории выпуклых упругих оболочек в закритической стадии, Харьков, 1960.
13. N. C. Huang, Trans. ASME, J. Appl. Mech., 31, 3 (1964).