Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 519.56+517.9 *МАТЕМАТИКА*

Н. Б. ЕНГИБАРЯН, М. А. МНАЦАКАНЯН

О ФАКТОРИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. А. Амбарцумяном 6 III 1972)

Задаче факторизации интегральных операторов Фредгольма второго рода посвящены многочисленные исследования [1]. В данной работе предлагается метод, позволяющий свести построение факторизации широких классов интегральных операторов к решению уравнений вольтеррова типа. Некоторые результаты для частного случая скалярного симметричного ядра были получены одним из авторов в [2]. Хотя примененный там метод приводит к ряду промежуточных результатов, имеющих самостоятельное значение, ниже мы предлагаем иной подход, отличающийся простотой и общностью. Сходный подход был применен в [3] к факторизации дифференциальных операторов второго порядка.

1. Пусть E — банахово пространство и B — банахова алгебра (б.а.) линейных ограниченных операторов, действующих в E. Обозначим через $L_2(E, r)$ банахово пространство сильно измеримых функций $g(x)$, $x \in (0, r)$, со значениями из E, для которых $\|g(x)\|_E \in L_2[0, r]$. Пусть R — б.а. интегральных операторов *, действующих в $L_2(E, r)$: $\mathbf{K} \in R$, если $\mathbf{K}g = \int\limits_0^r K(x, t) g(t)\, dt$, причем $\forall (x, t) \in [0, r]\times[0, r]$, $K(x, t) \in B$ и $\|K(x, t)\|_B \in L_2[0, r]\times[0, r]$.

Введем подалгебры $R_\pm$ правого и левого вольтерровых операторов $\mathbf{K}_\pm$ с ядрами $K_\pm(x, y)$, равными нулю при $x \gtrless y$.

Ядром произведения $\psi = \psi_-\psi_+$ операторов $\psi_\pm \in R_\pm$ служит

$$\psi(x, y) = \int\limits_0^{\min(x, y)} \psi_-(x, t)\, \psi_+(t, y)\, dt. \tag{1}$$

Пусть R_1 — б.а. — расширение R единицей $\mathbf{I}$.

Рассмотрим следующую задачу факторизации: $\forall \mathbf{K} \in R$, $\|\mathbf{K}\| < 1$, найти $\psi_\pm \in R_\pm$, чтобы

$$\mathbf{I} - \mathbf{K} = (\mathbf{I} - \psi_-)(\mathbf{I} - \psi_+). \tag{2}$$

Выражение (2) эквивалентно следующему соотношению для ядер:

$$K_+(x, y) + K_-(x, y) = \psi_+(x, y) + \psi_-(x, y) - \int\limits_0^{\min(x, y)} \psi_-(x, t)\, \psi_+(t, y)\, dt, \tag{3}$$

где

$$K_\pm(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & x \lessgtr y, \\ 0, & x \gtrless y. \end{cases} \tag{4}$$

---

* Жирным шрифтом обозначаются элементы R, чтобы отличить их от соответствующих ядер.

Теорема. *Для того чтобы имела место факторизация* (2), *необходимо и достаточно, чтобы оператор-функции* $\psi_\pm(x, y)$ *удовлетворяли системе**

$$\psi_+(x, y) = K_+(x, y) + \int_0^x \tilde{\psi}_-(t, x)\, \psi_+(t, y)\, dt,$$
$$\tilde{\psi}_-(x, y) = \tilde{K}_-(x, y) = \int_0^x \tilde{\psi}_-(t, y)\, \psi_+(t, x)\, dt, \quad y > x. \tag{5}$$

То обстоятельство, что верхний предел интегрирования не фигурирует в (5), дает возможность решением нелинейной системы (5) одновременно факторизовать семейство операторов $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ при различных значениях r, удовлетворяющих условию $\|\mathbf{K}\| < 1$ на $L_2[E, r]$.

Существование и единственность решения системы (5) при $\|\mathbf{K}\| < 1$ могут быть доказаны непосредственно. Они следуют также из результатов ([1]), в которой устанавливается возможность факторизации

$$(\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{V}_+)(\mathbf{I} + \mathbf{V}_-),$$

при этом $\mathbf{V}_\pm \in R_\pm$ определяются решением уравнений Фредгольма второго рода со специальными правыми частями.

Вольтерровость системы (5) позволяет найти ее решение $\psi_\pm(x, y)$ рекуррентно по первому аргументу. Для широких классов ядер последовательные приближения для (5) сходятся к ее решению со скоростью, близкой к факториальной.

Построение факторизации (2) позволяет свести решение уравнения

$$f(x) - \int_0^r K(x, t)\, f(t)\, dt = g(x) \tag{6}$$

к последовательному решению двух линейных уравнений Вольтерра.

Если E гильбертово пространство, то система (5) может быть переписана в виде

$$\psi_+(x, y) = K_+(x, y) + \int_0^x \tilde{\psi}_-(t, x)\, \psi_+(t, y)\, dt,$$
$$\tilde{\psi}_-^*(x, y) = \tilde{K}_-^*(x, y) + \int_0^x \psi_+^*(t, x)\, \tilde{\psi}_-^*(t, y)\, dt, \tag{7}$$

где звездочкой обозначается сопряженный оператор. В частном случае, когда выполняется условие симметрии

$$K^*(x, y) = \tilde{K}(x, y) = K(y, x), \tag{8}$$

оператор-функции ψ_+ и ψ_- совпадают и для их определения получается уравнение

$$\psi(x, y) = K(x, y) + \int_0^x \psi^*(t, x)\, \psi(t, y)\, dt, \quad y > x. \tag{9}$$

2. Перейдем к рассмотрению ряда частных случаев, на примере которых отчетливо проявляются особенности данного метода факторизации и его связь с некоторыми результатами теории интегральных и дифференциальных уравнений.

---

* Знак $\sim$ означает транспонирование по аргументам, например, $\tilde{F}(x, y) = F(y, x)$

а) Уравнение Винера — Хопфа. Пусть ядро K зависит от разности аргументов: $K(x, y) = K(y - x)$. Введем обозначения

$$\psi_+(x, y) = u_+(\tau, y), \quad \tilde{\psi}_-(x, y) = u_-(\tau, y), \quad \text{где } \tau \equiv y - x.$$

В этих обозначениях (5) принимает вид (ниже всюду $\tau > 0$)

$$\begin{aligned} u_+(\tau, x+\tau) &= K_+(\tau) + \int_0^x u_-(t, x)\, u_+(\tau+t, \tau+x)\, dt, \\ u_-(\tau, x+\tau) &= K_-(\tau) + \int_0^x u_-(\tau+t, \tau+x)\, u_+(t, x)\, dt. \end{aligned} \tag{10}$$

Если $r = \infty$, то (6) представляет собой операторное уравнение Винера — Хопфа. Совершая в (10) предельный переход при $x \to \infty$, получаем

$$\begin{aligned} L_+(\tau) &= K_+(\tau) + \int_0^\infty L_-(t)\, L_+(\tau+t)\, dt, \\ L_-(\tau) &= K_-(\tau) + \int_0^\infty L_-(\tau+t)\, L_+(t)\, dt, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\quad L_\pm(\tau) = \lim\limits_{x\to\infty} u_\pm(\tau, x)$.

Пусть, далее, $K_\pm(\tau)$ представлены в виде

$$K_\pm(\tau) = \int_a^b G_\pm(s)\, e^{-\tau s} ds, \qquad 0 < a < b. \tag{12}$$

Тогда и $L_\pm(\tau)$ допускают представление

$$L_\pm(\tau) = \int_a^b \varphi_\pm(s)\, e^{-\tau s} ds, \tag{13}$$

причем оператор-функции $\varphi_\pm(s)$ удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \varphi_+(s) &= G_+(s) + \int_0^\infty \varphi_-(s')\, \varphi_+(s) \frac{ds'}{s+s'}, \\ \varphi_-(s) &= G_-(s) + \int_0^\infty \varphi_-(s)\, \varphi_+(s') \frac{ds'}{s+s'}; \end{aligned} \tag{14}$$

$G_\pm(s)$ и $\varphi_\pm(s)$ — вообще говоря, обобщенные функции вида $F(s) + \sum c_k \delta(s - s_k)$.

В частном случае скалярного симметричного ядра система (14) обращается в известное уравнение Амбарцумяна.

б) Система интегральных уравнений. Пусть $E = R^n$. Тогда уравнение (6) обращается в систему

$$f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} \int_0^r K_{ij}(x, t)\, f_j(t)\, dt = g_i(x). \tag{15}$$

Система же (7) в матричных элементах принимает вид

$$\psi^{\pm}_{im}(x, y) = K^{\pm}_{im}(x, y) + \sum_{j=1}^{n} \int^{x} \psi^{\mp}_{ji}(t, x)\, \psi^{\pm}_{jm}(t, y)\, dt. \tag{16}$$

Условие симметрии (8) обращается в $K_{im}^{+}(x, y) = K_{mi}^{-}(x, y)$ и приводит к $\psi_{im}^{+}(x, y) = \psi_{im}^{-}(x, y)$ с соответствующими упрощениями.

в) Кратные интегральные уравнения. Пусть $E = L_2(G)$, где $G \subset R^n$, а $K(x, y) \in B_1 \subset B \quad \forall (x, y) \in [0, r] \times [0, r]$, где B_1 — б.а. интегральных операторов, действующих в E: $K(x, y)g = \int\limits_G T(P, Q; x, y) g(Q) dQ$, $P \in G$. Тогда и $\psi_{\pm}(x, y) \in B_1$, причем их ядра $\omega_{\pm}(P, Q; x, y)$ определяются из системы функциональных уравнений

$$\omega_{\pm}(P, Q; x, y) = K_{\pm}(P, Q; x, y) + \int\limits_G dR \int\limits_0^x \omega_{\mp}(R, P; t, x)\, \omega_{\pm}(R, Q; t, y)\, dt, \tag{17}$$

вольтеррова типа.

г) Система дифференциальных уравнений. Пусть ядро $K(x, y)$ имеет структуру

$$K_{\pm}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} u_j^{\pm}(x)\, v_j^{\pm}(y). \tag{18}$$

Тогда уравнение (6) эквивалентно следующей краевой задаче для системы дифференциальных уравнений относительно функций со значениями из E:

$$\pm \frac{d\omega_j^{\pm}(x)}{dx} = v_j^{\mp}(x) \left[g(x) + \sum_{s=1}^{n} \left(u_s^{-}(x)\, \omega_s^{+}(x) + u_s^{+}(x)\, \omega_s^{-}(x) \right) \right] \tag{19}$$

с краевыми условиями $\omega_j^{+}(0) = \omega_j^{-}(r) = 0$.

Система же (5) обращается в задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dW_{jm}(x)}{dx} = \left[v_m^{-}(x) + \sum_{s=1}^{n} W_{sm}(x)\, v_s^{+}(x) \right] \left[u_j^{+}(x) + \sum_{s=1}^{n} u_s^{-}(x) W_{js}(x) \right], \qquad W_{jm}(0) = 0, \tag{20}$$

относительно оператор-функций $W_{jm}(x)$ со значениями из B.

Авторы выражают глубокую благодарность акад. В. А. Амбарцумяну за ценные обсуждения.

Институт математики
Академия наук АрмССР
Ереван
Бюраканская астрофизическая обсерватория

Поступило
26 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1967. [2] Н. Б. Енгибарян, ДАН, **203**, 19 (1972). [3] В. С. Владимиров, ПММ, **19**, 315 (1955).