

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

С. Д. ИВАСИШЕН

МАТРИЦА ГРИНА ОБЩЕЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ЛЮБОГО ПОРЯДКА*(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 II 1972)*

Матрица Грина общих параболических граничных задач построена и изучена в ⁽¹⁻³⁾ для случая однородных граничных условий как в ограниченной, так и в неограниченной областях и в ^(4, 5) для случая неоднородных граничных условий в ограниченном цилиндре. Во всех этих работах предполагалось, что порядки граничных условий меньше порядка системы. Здесь проводится исследование матрицы Грина общей неоднородной граничной задачи для параболических по И. Г. Петровскому систем в произвольной цилиндрической области без ограничения на порядки граничных операторов.

Матрица Грина общей неоднородной задачи с граничными условиями любого порядка для одного эллиптического уравнения рассмотрена в ⁽⁶⁾, для произвольной эллиптической до Даггису — Ниренбергу системы в случае однородных граничных условий — в ⁽⁷⁾.

Будем использовать определения и обозначения из ⁽⁴⁾.

1. В области $Q_0 = [0, T] \times \Omega_0$, где Ω_0 — конечная или бесконечная область в пространстве E_n с гладкой границей Ω_1 , могущей быть также конечной или бесконечной, рассмотрим параболическую граничную задачу

$$Lu \equiv \left(D_t - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t, x) D_x^k \right) u = f_0(t, x),$$

$$B_j u \Big|_{Q_1} \equiv \sum_{2bk_0 + |k| \leq j} b_{jk_0 k}(t, x) D_t^{k_0} D_x^k u \Big|_{Q_1} = f_j(t, x), \quad j = 1, \dots, bN = m, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = 0.$$

Здесь a_k — матрицы размеров $N \times N$, b_{jk} — матрицы-строки длины N ; u, f_0 — матрицы-столбцы высоты N ; $Q_1 = [0, T] \times \Omega_1$.

Предположим, что для задачи (1) выполнены условия (A) и (B_l) из ⁽⁴⁾ с некоторым $l > 0$.

Возьмем произвольную точку $y \in \Omega_1$ и ее малую окрестность U ; введем в ней локальную систему координат $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$, в которой уравнение куска границы $U \cap \Omega_1$ имеет вид $\bar{x}_n = 0$. Пусть B_j — оператор B_j , записанный в системе координат $t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Через $r(Q)$, $Q = (t, y)$, обозначим наибольший порядок производной по $\bar{x}_n$, входящей в операторы B_j , $j = 1, \dots, m$, в точке Q . Он не зависит от выбора локальной системы координат, но, вообще говоря, зависит от точки Q . Положим $r = \sup_{Q \in Q_1} r(Q)$.

Это число будем называть порядком операторов B_j , $j = 1, \dots, m$, по порядку на Q_1 .

Матрицей Грина задачи (1) назовем матрицу $G(P, Q) = \{G_0(P, Q), G_1(P, Q), \dots, G_m(P, Q)\}$, $P = (t, x)$, $Q = (t, y)$, где $G_0(P, Q)$ определена при $P, Q \in Q_0$, $P \neq Q$, а $G_j(P, Q)$ для $j > 0$ — при $P \in Q_0$, $Q \in Q_1$, $P \neq Q$; такую, что всякое решение $u \in H_0^{p+\lambda}$, $p = \max(2b,$

$r_1, \dots, r_m$), задачи (1) представимо в виде

$$u(P) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(P, Q) f_0(Q) dy + \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(P, Q) f_j(Q) dy \equiv \sum_{j=1}^m G_j f_j. \quad (2)$$

В настоящей работе строится матрица Грина задачи (1), устанавливаются точные оценки ее производных как по основным, так и по параметрическим переменным, подробно изучается ее структура. При этом оказывается, что при $r < 2b$ структура матрицы Грина аналогична той, которая получена в ⁽⁴⁾ для случая $r_j \leq 2b - 1$. Если же $r \geq 2b$, то матрица $G_0(P, Q)$ дополнительно содержит слагаемое, представляющее собой линейную комбинацию производных до порядка $r - 2b$ от δ -функции, сосредоточенной на границе.

2. Введем некоторые определения и обозначения.

Обозначим через $U_{r+\alpha, s+\alpha}^{p, i, j}$ класс ядер $U_{r+\alpha, s+\alpha}^p(Q_i, Q_j)$, определенный в ⁽⁴⁾. Введем еще класс $\bar{U}_{r+\alpha, s+\alpha}^p$, который отличается от $U_{r+\alpha, s+\alpha}^{p, 0, 0}$ только тем, что в правых частях неравенств (5) из ⁽⁴⁾, определяющих этот класс, стоят дополнительные множители соответственно вида

$$\exp \left\{ -c \left[\frac{\max(\rho(x), \rho(y))}{(t-\tau)^{1/(2b)}} \right]^q \right\}, \quad \exp \left\{ -c \left[\frac{\max(\rho(x_1, x_2), \rho(y))}{(t-\tau)^{1/(2b)}} \right]^q \right\},$$

$$\exp \left\{ -c \frac{\max(\rho(x), \rho(y_1, y_2))}{(t-\tau)^{1/(2b)}} \right\}, \quad \exp \left\{ -c \left[\frac{\max(\rho(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2))}{(t-\tau)^{1/(2b)}} \right]^q \right\},$$

где $\rho(x)$ — расстояние от точки x до границы Ω_1 , а $\rho(x_1, x_2) = \min(\rho(x_1), \rho(x_2))$. Таким образом, ядра из класса $\bar{U}_{r+\alpha, s+\alpha}^p$ могут иметь особенности только в точках границы Q_1 .

Рассмотрим достаточно мелкое локально конечное покрытие области Ω_0 множествами $\Omega_0^{(i)}$, и пусть $\{\varphi_i(x)\}$ — соответствующее этому покрытию разложение единицы. Покрытие $\{\Omega_0^{(i)}\}$ индуцирует покрытие $\{\Omega^{(i)}\}$ границы Ω_1 , а функции $\varphi_i(x)$, носители которых имеют общие точки с границей Ω_1 , образуют, очевидно, разложение единицы, соответствующее покрытию $\{\Omega_1^{(i)}\}$.

Справедлива следующая основная

Теорема 1. Пусть операторы L, B_j и граница Ω_1 области Ω_0 удовлетворяют условиям (A) и (B_i) из ⁽⁴⁾ с $l \geq 2(p_0 + p_1) + 3$, где $p_0 = \max_{j=1, \dots, m} (1, l_0)$, $p_1 = \max_{j=1, \dots, m} (0, l_1 + 1)$, $l_0 = \max (2b - r_j)$, $l_1 = \max (r_j - 2b)$.

Тогда для задачи (1) существует единственная матрица Грина

$$G(P, Q) = \{G_0(P, Q), G_1(P, Q), \dots, G_m(P, Q)\},$$

обладающая свойствами:

$$1) G_0(P, Q) = G'_0(P, Q) + G''_0(P, Q), \quad G'_0(P, Q) \in \bar{U}_{h_0+\alpha, h_1+\alpha}^{2b, 0, 0},$$

$$G''_0(P, Q) = \sum_i \varphi_i(y) \mathcal{D}_i(y) \Pi_y^y \sum_{v=0}^{r^{(i)}-2b} \bar{w}_v(P, \bar{Q}') \delta^{(v)}(\bar{y}_n)$$

где $h_0 = 2b + l - p_0$, $h_1 = l - p_1 - 1$; $\mathcal{D}_i(y)$ — якобиан преобразования $\bar{y} = V(y)$, переводящего окрестность множества $\Omega_0^{(i)}$ в полушар $|\bar{y}| \leq d$, $\bar{y}_n > 0$; Π_y^y — оператор перехода от $\bar{y}$ к y ; $\bar{Q}' = (\tau, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{n-1})$; $r^{(i)}$ — порядок операторов B_j по нормали на $Q_1^{(i)} = [0, T] \times \Omega_1^{(i)}$; $\delta^{(v)}$ — производ-

ная ν -го порядка от δ -функции, сосредоточенной в точке $\bar{y}_n = 0$;

$$\Pi_{\bar{y}}^{\nu} w_{\nu}(P, \bar{Q}') \in U_{h_0+\alpha, h_1+\nu+1+\alpha}^{2b+\nu+1}(Q_0, Q_1^{(i)}); G_0''(P, Q) = 0$$

при $r < 2b$.

$$G_j(P, Q) \in U_{h_0+\alpha, h_1-2b+r_j+1+\alpha}^{r_j+1, 0, j}, \quad j > 0.$$

2) Имеет место представление

$$G_0'(P, Q) = Z(P, Q) + v(P, Q),$$

где $Z(P, Q)$ — фундаментальная матрица решений системы $Lu = f_0$, а $v(P, Q) \in \bar{U}_{h_0+\alpha, h_1+\alpha}^{2b}$.

3) Для $G_j(P, Q)$, как функций P , при тех P и Q , для которых они определены, справедливы равенства

$$LG_j(P, Q) = 0, \quad B_i G_j(P, Q)|_{Q_i} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m; i = 1, \dots, m.$$

Доказательство теоремы начинается с рассмотрения случая, когда $r < 2b$. В этом случае матрица Грина строится по той же схеме, что и в ⁽⁴⁾ для $r_j < 2b$ и ограниченной области. Сначала конструируется оператор $G = \{G_0, G_1, \dots, G_m\}$ (оператор Грина) такой, что

$$\mathcal{L}G = I, \quad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} L \\ B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}, \quad I — \text{тождественный оператор}$$

Главная часть оператора G строится с помощью операторов, ядра которых конструируются из фундаментальных матриц решений и ядер Пуассона некоторых модельных задач. Затем подробно изучаются эти операторы. При исследовании их действия в классах Гельдера существенно используется методика оценок параболических потенциалов. Изучение свойств ядер операторов, дающих главную часть оператора G , основывается на теореме о композиции параболических ядер с неинтегрируемыми особенностями ⁽⁴⁾.

Утверждения теоремы в случае $r \geq 2b$ доказываются, исходя из того, что этот случай сводится к рассмотренному выше. Действительно, выражая с помощью системы производные высокого порядка по нормали в граничных операторах B_j через производные младших порядков по нормали и производные по касательным направлениям, задача (1) сводится к следующей задаче:

$$\begin{aligned} Lu &= f_0, \\ B_j' u|_{Q_1} &= f_j - C_j f_0|_{Q_1}, \quad j = 1, \dots, m, \\ u|_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где порядки операторов B_j' по нормали меньше $2b$, а C_j — дифференциальные операторы, порядки которых не превышают $r_j - 2b$. На основании уже рассмотренного решение задачи (3), а следовательно, задачи (1) записывается с помощью формулы

$$u(P) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0'(P, Q) f_0(Q) dy + \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(P, Q) [f_j(Q) - C_j f_0|_{Q_1}] dy, \quad (4)$$

которую можно переписать в виде (2).

3. Приведем теорему о действии операторов Грина в классах Гельдера.

Введем классы $H_{i, k(t, a)}^{s+\alpha}$, $i = 0, 1$. Вектор-функция f принадлежит классу $H_{0, k(t, a)}^{s+\alpha}$, если она определена в Ω_0 , имеет непрерывные производные $D_{t^{k_0}} D_x^k f \equiv f^{(\bar{k})}$, $2bk_0 + |k| \equiv |\bar{k}| \leq s$, причем $D_{t^{k_0}} f|_{t=0} = 0$, $k_0 = 0, \dots, [s / (2b)]$, и конечная норма

$$\begin{aligned} \|f\|_{0, k(t, a)}^{s+\alpha} = & \sum_{|\bar{k}| \leq s} \sup_{(t, x) \in Q_0} |f^{(\bar{k})}(t, x) \chi^{-1}(t, x)| + \\ & + \sum_{|\bar{k}| = s} \sup_{(t, x), (\bar{t}, \bar{x}) \in Q_0} \frac{|f^{(\bar{k})}(t, x) - f^{(\bar{k})}(\bar{t}, \bar{x})|}{|x - \bar{x}|^\alpha [\chi(t, x) + \chi(\bar{t}, \bar{x})]} + \\ & + \sum_{s-2b < |\bar{k}| \leq s} \sup_{(t, x), (\bar{t}, \bar{x}) \in Q_0} \frac{|f^{(\bar{k})}(t, x) - f^{(\bar{k})}(\bar{t}, \bar{x})|}{|t - \bar{t}|^{(s-|\bar{k}|+\alpha)/(2b)} [\chi(t, x) + \chi(\bar{t}, \bar{x})]}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \chi(t, x) &= \exp \left\{ k(t, a) \sum_{j=1}^n x_j^q \right\}, \\ k(t, a) &= c_0 a [c_0^{2b-1} - ta^{2b-1}]^{-1/(2b-1)}, \end{aligned}$$

c_0 — некоторое число, определяемое постоянными из оценок матрицы Грина, а число a выбрано так, чтобы $T < (c_0/a)^{2b-1}$. Класс $H_{1, k(t, a)}^{s+\alpha}$ определяется аналогично с помощью параметризации границы Ω_1 . Заметим, что $H_{i, k(t, 0)}^{s+\alpha} = H_i^{s+\alpha}$.

Теорема 2. В предположениях теоремы 1 операторы G_j действуют из $H_{0, k(t, a)}^{s+\alpha}$ при $j = 0$ и $H_{1, k(t, a)}^{2b-r_j+s+\alpha}$ при $j > 0$ в $H_{0, k(t, a)}^{2b+s+\alpha}$, $\max(0, l_1) \leq s \leq \min(l - l_0, l - 1)$, и ограничены.

4. Из теорем 1 и 2 и единственности решения граничной задачи в классе ограниченных функций следует корректная разрешимость задачи (1) в случае неограниченной области в классах растущих функций.

Теорема 3. Если выполнены предположения теоремы 1 и $f_0 \in H_{0, k(t, a)}^{s+\alpha}$, $f_j \in H_{1, k(t, a)}^{2b-r_j+s+\alpha}$, где $\max(0, l_1) \leq s \leq \min(l - l_0, l - 1)$, то существует единственное решение задачи (1) из класса $H_{0, k(t, a)}^{2b+s+\alpha}$, для которого справедливо неравенство

$$\|u\|_{0, k(t, a)}^{2b+s+\alpha} \leq C \left(\|f_0\|_{0, k(t, a)}^{s+\alpha} + \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{1, k(t, a)}^{2b-r_j+s+\alpha} \right).$$

Для областей частного вида аналогичные результаты установлены в (8, 9).

Автор выражает искреннюю благодарность С. Д. Эйдельману за руководство.

Киевское высшее инженерное радиотехническое училище противовоздушной обороны

Поступило
11 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Д. Эйдельман, С. Д. Ивасишен, Междунароп. конгресс матем., Тез., секция 7, 62 (1966); ДАН, 172, № 6 (1967); ДАН, 183, № 4 (1968); Тр. Московск. матем. общ., 23, 179 (1970). ² И. И. Веренич, С. Д. Ивасишен, Доп. АН УРСР, сер. А, № 12 (1970). ³ В. А. Солонников, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. АН СССР, 14, 256 (1969). ⁴ С. Д. Ивасишен, ДАН, 187, № 4 (1969). ⁵ С. Д. Ивасишен, ДАН, 197, № 2 (1971). ⁶ И. А. Коваленко, Я. А. Ройтберг, Укр. матем. журн., 23, № 6, 772 (1971). ⁷ В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 110, 107 (1970); 116, 181 (1971). ⁸ Б. Я. Липко, С. Д. Эйдельман, ДАН, 166, 1050 (1966). ⁹ С. Д. Ивасишен, В. П. Лавренко, Доп. АН УРСР, № 4 (1967).