

Н. Ч. КРУТИЦКАЯ

**ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛИЗАЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЧЕЗАРОВСКИХ
СРЕДНИХ И СРЕДНИХ МЕТОДА АБЕЛЯ ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ
СУММИРОВАНИИ КРАТНОГО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО
РЯДА ФУРЬЕ В КЛАССАХ ЛИУВИЛЛЯ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 21 II 1972)

Обозначим символом G основной N -мерный куб с центром в нуле и ребром 2π . Суммирование (C, α) означает прямоугольное ограниченное суммирование методом Чезаро порядка α , суммирование A — ограниченное суммирование методом Абеля.

В работе (1) устанавливались достаточные условия локализации средних метода (C, α) и A N -кратного тригонометрического ряда Фурье в классах Лиувилля $L_p^{\alpha\gamma}(G)$. Было показано, что для методов (C, α) порядка $\alpha \in [0, 1)$ справедлив принцип локализации в классе $L_p^{\alpha\gamma}(G)$, если $p(\gamma + \alpha) \geq N - 1$, $p > 1$, $\gamma \geq 0$, а для метода A и метода (C, α) порядка $\alpha \geq 1$ этот принцип справедлив при условии, что $p(\gamma + 1) > N - 1$, если $p > 1$, $\gamma > 0$, и при условии $p \geq N - 1$, если $p > 1$, $\gamma = 0$. Из теорем вложения (2) следует, что этот результат верен при $p = 1$, $\gamma > 0$ со строгим знаком неравенства в условии на p и γ в случае α из полуинтервала $[0, 1)$ и полностью сохраняется для $\alpha \geq 1$ и метода A .

В этой заметке устанавливаются окончательные условия локализации для методов (C, α) и A в классах $L_p^{\alpha\gamma}(G)$ при $p \geq 1$, $\gamma \geq 0$.

Теорема 1 ($\gamma > 0$). 1) Для метода (C, α) порядка $\alpha \in [0, 1)$ справедлив принцип локализации в классе $L_1^{\alpha\gamma}(G)$, если $\gamma + \alpha = N - 1$.

2) В классах $L_p^{\alpha\gamma}(G)$ при условии, что $p \geq 1$, $p(\gamma + 1) = N - 1$, справедлив принцип локализации для метода A и метода (C, α) при $\alpha \geq 1$.

Теорема 2 ($p \geq 1$, $\gamma \geq 0$). 1) Для метода (C, α) порядка $\alpha \in [0, 1)$ при условии $p(\gamma + \alpha) < N - 1$, вообще говоря, не справедлив принцип локализации в классе $L_p^{\alpha\gamma}(G)$.

2) В классе $L_p^{\alpha\gamma}(G)$ при условии, что $p(\gamma + 1) < N - 1$, $\alpha \geq 0$, вообще говоря, нет локализации ни для метода (C, α) , ни для метода A .

1. Сделаем некоторые указания по поводу доказательства сформулированных утверждений. Рассмотрим случай (C, α) при $\alpha \geq 0$. Введем для $\gamma > 0$ ядро $T_\gamma(x, y)$ (см. (3)) типа ядра Бесселя — Макдональда. Обозначим чезаровские средние ядра через $\sigma_n^\alpha(x, y, T_\gamma)$, где $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$. Имеет место следующая лемма о представлении $\sigma_n^\alpha(x, y, T_\gamma)$.

Лемма.

$$\sigma_n^\alpha(x, y, T_\gamma) = C(N, \gamma) \cdot \prod_{i=2}^N \left\{ \sum_{k_i=0}^{n_i-1} \left(\sum_{j=0}^{k_i} v_j(x_i, y_i) \tau_{n_i, j}^\alpha \right) \cdot \int_{k_i}^{k_i+1} t_i dt_i + \right. \\ \left. + \sum_{k_i=0}^{n_i} v_{k_i}(x_i, y_i) \tau_{n_i, k_i}^\alpha \cdot \int_{n_i}^{\infty} t_i dt_i \right\} \cdot \{F_{n_i}^\alpha(x_1 - y_1, u)\},$$

где $\tau_{n, k}^\alpha = A_{n-k}^\alpha / A_n^\alpha$, $A_n^\alpha = (\alpha + 1) \dots (\alpha + n) / n!$, $u^2 = t_2^2 + \dots + t_N^2 + 1$,

$$v_k(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{если } k = 0, \\ \cos k(x - y), & \text{если } k > 0; \end{cases}$$

Если $\delta < t < 2\pi - \delta$, $\eta > 0$, то

$$1) F_n^0(t, u) = \frac{\cos [t(n + 1/2) - 1/2\pi]}{2\sin^{1/2}t \cdot (n^2 + u^2)^{\nu/2 + N - 1}} + o(u^{-\nu - 2N + 1});$$

$$2) \text{ при } 0 < \alpha < 1 \quad F_n^\alpha(t, u) = \frac{\cos \left[t \left(n + \frac{\alpha + 1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} (\alpha + 1) \right]}{A_n^\alpha (2\sin^{1/2}t)^{\alpha + 1} \cdot (n^2 + u^2)^{\nu/2 + N - 1}} +$$

$$+ o(n^{-1}u^{-\nu - 2N + 2} + n^{-2}u^{-\nu - 2N + 1} + u^{-\nu - 2N + 2\eta});$$

$$3) F_n^1(t, u) = \frac{1}{4A_n^1 \sin^2 1/2t \cdot u^{\nu + 2N - 2}} - \frac{\cos t(n + 1)}{4A_n^1 \sin^2 1/2t \cdot (n^2 + u^2)^{\nu/2 + N - 1}} +$$

$$+ o(n^{-1}u^{-\nu - 2N + 1} + u^{-\nu - 2N + 2\eta});$$

$$4) \text{ при } \alpha > 1 \quad F_n^\alpha(t, u) = \frac{A_n^{\alpha - 1}}{4A_n^\alpha \sin^2 1/2t \cdot u^{\nu + 2N - 2}} +$$

$$+ o(u^{-\nu - 2N + 2\eta} + n^{-1}u^{-\nu - 2N + 1} + n^{-2}u^{-\nu - 2N + 2}).$$

Теорему 1 доказываем, опираясь на лемму, методом, развитым в работе В. А. Ильина⁽³⁾.

Схема доказательства теоремы 2 для метода (C, α) . Пусть $n_i \rightarrow \infty$ и $\lambda^{-1} < n_i/n_j < \lambda$ для любых $i, j = 1, 2, \dots, N$. Выберем подпоследовательность $\{n\}$ векторов такую, что в ней два неравных вектора имеют различные первые координаты. Пусть $x_0 = 0$, D — произвольная внутренняя окрестность нуля. Введем банахово пространство функций $h(y)$, принадлежащих классу $L_p(G)$ при $p \geq 1$ и обращающихся тождественно в нуль в области D , с обычной нормой в этом пространстве. В сопряженном пространстве $L_q(G - D)$ рассмотрим последовательность функций $\sigma_{n_i}^\alpha(x_0, y, T_\gamma) \equiv \sigma_n^\alpha(x_0, y, T_\gamma)$. С помощью леммы доказывается, что

$$\overline{\lim}_{n_i \rightarrow \infty} \|\sigma_{n_i}^\alpha(x_0, y, T_\gamma)\|_{L_q(G - D)} = \infty \quad (1)$$

при соблюдении условий теоремы 2 на α, p, γ . Из (1) и из теоремы Банаха — Штейнгауза резонансного типа (см. (4), гл. 1) следует существование функции $h(y) \in L_p(G)$, обращающейся тождественно в нуль в области D и такой, что

$$\overline{\lim}_{n_i \rightarrow \infty} \int_{G - D} h(y) \cdot \sigma_{n_i}^\alpha(x_0, y, T_\gamma) dy = \infty.$$

Тогда функция $\varphi(x) = \int_{G - D} h(y) \cdot T_\gamma(x, y) dy$ реализует пример, доказывающий справедливость теоремы 2 для метода (C, α) .

2. Идея доказательства теорем 1 и 2 для метода Абеля та же, что и для методов (C, α) , но само доказательство требует отдельной записи.

З а м е ч а н и е. Метод доказательства теоремы 2 для классов $L_p(G)$ при $p > 1$ такой же, как и для классов $L_p^{*\nu}(G)$, при этом используются известные представления (см. (5)) ядер $K_n^\alpha(t)$ метода (C, α) и ядер $A_r(t)$ метода Абеля и оценки их норм в L_q . Условия локализации в классе интегрируемых функций изучались в работе (6).

Автор выражает глубокую благодарность проф. В. А. Ильину за постановку задачи и помощь в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Ч. Крутицкая, Математические заметки, 12, № 6 (1972). ² С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1965. ³ В. А. Ильин, Математические заметки, 8, № 5, 595 (1970). ⁴ С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ⁵ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 2, М., 1965. ⁶ J. G. Herriot, Duke J., 11, 735 (1944).