Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 521.13 *АСТРОНОМИЯ*

Е. М. НЕЖИНСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЗРЫВНОГО РАСПАДА И ОДНОВРЕМЕННОГО СТОЛКНОВЕНИЯ n МАТЕРИАЛЬНЫХ ГРАВИТИРУЮЩИХ ТОЧЕК

(Представлено академиком А. А. Михайловым 25 II 1972)

В статье предпринята попытка изучить с небесно-механической точки зрения взрывы, которые могут происходить в ядрах галактик ([1]) или каких-либо других центрах конденсации материи. Т. е. считается, что после взрыва разлетаются как бы материальные точки, между которыми действуют только гравитационные силы. Известно ([2]), что если n частиц одновременно сталкиваются в момент t_0 (обычно считается, что $t_0 = 0$), то при t, близких к t_0, конфигурация образования этими частицами очень близка к центральной конфигурации *.

Поскольку система одновременно сталкивающихся частиц при $t > t_0$ — обратимая динамическая система, можно считать, что образовавшаяся после взрыва система частиц также центральная.

Введем новые переменные: $\xi_i = t^{-2/3}\xi_i$, $\mathbf{t} = -\ln t$, где t — время, ξ_i — вектор положения i-й частицы в барицентрической системе координат. Тогда уравнения движения $m_i\xi_i'' = U_{\xi_i}$, $i = 1, \ldots, n$, можно переписать в виде

$$m_i(\ddot{\xi}_i - {}^1/_3\dot{\xi}_i - {}^2/_9\xi_i) = \mathbf{U}_{\xi_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где штрихами и точками обозначены производные по t и $\mathbf{t}$ соответственно. Как показано в ([2]), при столкновениях, а также сразу после взрыва реализуются решения вида $\xi_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$. Исследуем устойчивость таких решений. Для этого в момент $\mathbf{t}_0$ на центральную конфигурацию $\xi_i = \text{const}$, $i = 1, \ldots, n$, наложим небольшое возмущение

$$\xi_i + \Delta\xi_i = (\mathbf{x}_i + \alpha_i, \quad \mathbf{y}_i + \beta_i, \quad \mathbf{z}_i + \gamma_i),$$

и из уравнений движения (1), сохраняя члены первого порядка малости, получим уравнения в вариациях

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}_i - \frac{\dot{\alpha}_i}{3} - \frac{2}{9}\alpha_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3}\left[(\alpha_j - \alpha_i) - 3(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)\Delta\right],\\
\ddot{\beta}_i - \frac{\dot{\beta}_i}{3} - \frac{2}{9}\beta_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3}\left[(\beta_j - \beta_i) - 3(\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i)\Delta\right],\\
\ddot{\gamma}_i - \frac{\dot{\gamma}_i}{3} - \frac{2}{9}\gamma_i &= \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{\rho_{ij}^3}\left[(\gamma_j - \gamma_i) - 3(z_j - z_i)\Delta\right], \quad i = 1, \ldots, n,
\end{aligned} \tag{2}$$

* В трехмерном пространстве n векторов ξ_i, определяющих положения n тел с массами $m_1, \ldots, m_n$, образуют центральную конфигурацию по отношению к этим телам, если сила, действующая на i-е тело, пропорциональна массе m_i и вектору ξ_i, т. е. если

$$U_{\xi_i} = \sigma m_i \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

причем скаляр σ не зависит от i (см. ([2]), § 355). Здесь мы рассматриваем такие конфигурации, которые остаются центральными в любой момент времени.

где
$$\Delta = \frac{(x_j - x_i)(\alpha_j - \alpha_i) + (y_j - y_i)(\beta_j - \beta_i) + (z_j - z_i)(\gamma_j - \gamma_i)}{\rho_{ij}^2}, \quad \rho_{ij} = |\xi_j - \xi_i|.$$

Если произвести замену переменных
$$\varkappa_i = \sqrt{m_i}\alpha_i, \quad \varkappa_{i+n} = \sqrt{m_i}\beta_i, \quad \varkappa_{i+2n} = \sqrt{m_i}\gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
то систему (2) в векторном виде можно переписать
$$\ddot{\varkappa} + A\varkappa = {}^1/_3\dot{\varkappa}.$$

Неособенным линейным преобразованием $\varkappa = D\tau$ приведем матрицу A к диагональному виду Λ
$$\ddot{\tau} + \Lambda\tau - {}^1/_3\dot{\tau} = 0. \tag{3}$$

Сначала проверим устойчивость центральных конфигураций перед столкновением $(t \to +\infty)$. Положим $\tau_i = r_i \exp(\omega_i t)$. Тогда из (3) получим систему дисперсионных уравнений
$$\omega_i^2 - {}^1/_3\omega_i + \lambda_i = 0, \quad i = 1, \ldots, 3n. \tag{4}$$
Очевидно, что для доказательства неустойчивости в этом случае необходимо найти частоты, у которых $\mathrm{Re}(\omega_i) > 0$. Из системы (4) видно, что таких частот будет не меньше $3n$. Что же касается устойчивости конфигураций, образовавшихся после взрыва, то, в силу обратимости рассматриваемых динамических систем, неустойчивые при столкновении частоты при разлете превращаются в устойчивые, и наоборот.

Из (4)
$$\omega_{i_{1,2}} = {}^1/_6 \pm \sqrt{{}^1/_{36} - \lambda_i},$$
т. е. при взрыве неустойчивые частоты появляются при $\lambda_i < 0$.

Итак, задача об устойчивости в этом случае сводится к определению знаков характеристических чисел матрицы A.

Здесь необходимо отметить, что могут появиться 4 формальные неустойчивые частоты (три из них связаны со смещением начала координат, одна с масштабными преобразованиями). Следовательно, чтобы доказать устойчивость конфигурации, образовавшейся после взрыва, нужно найти хотя бы 5 неустойчивых частот. Несколько громоздким путем нам действительно удалось доказать следующее утверждение.

Теорема. *Матрица A имеет по крайней мере 5 отрицательных характеристических чисел.*

Следовательно, форма расположения частиц перед столкновением или сразу после взрыва неустойчива.

В заключение мне хотелось бы выразить благодарность В. А. Антонову за руководство данной работой.

Институт теоретической астрономии
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Амбарцумян, Проблемы эволюции вселенной, Ереван, 1968.
[2] А. Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, М., 1967.