

В. М. ПЕТКОВ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 II 1972)

В работе (1) С. Мизохата доказал, что гиперболичность уравнения необходима для корректности нехарактеристической задачи Коши. С другой стороны, если характеристическое уравнение оператора имеет кратные корни, могут появиться условия на младшие члены, необходимые для корректности. В (2) были найдены такие условия в случае, когда кратность характеристических корней постоянна, а в (3) — в случае, когда кратность этих корней не превышает трех.

В настоящей работе приводятся условия корректности для операторов с характеристическими корнями любой кратности.

Введем следующие обозначения:

$$x = (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, \tilde{x}), \quad \xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) = (\xi_0, \tilde{\xi}),$$

$$\Omega = (t_0, T) \times \mathbb{R}^n, \quad t_0 < T,$$

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad D = (D_0, \dots, D_n), \quad D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$P_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=s} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad P_{s,\beta}^{(\alpha)}(x, \xi) = \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} P_s(x, \xi),$$

$$\|u(x_0, \tilde{x})\|_{k,s}^2 = \sum_{j=0}^k \left\| \frac{\partial^j u(x_0, \tilde{x})}{\partial x_0^j} \right\|_{H_{s-j}(\mathbb{R}_x^n)}^2.$$

Предположим, что $a_{m,0,\dots,0} \equiv 1$; $a_\alpha(x) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ и являются ограниченными в $\bar{\Omega}$ вместе со всеми производными. Пусть $\lambda_i(x, \tilde{\xi})$ — корни уравнения $P_m(x, \xi) = 0$ относительно ξ_0 , μ — фиксированное вещественное число такое, что $\max_{\substack{x \in \bar{\Omega}, |\tilde{\xi}|=1 \\ i=1,2,\dots,m}} |\lambda_i(x, \tilde{\xi})| \leq \mu$. Обозначим через $\Gamma(Z; \mu)$

конус

$$\Gamma(Z; \mu) = \left\{ x; \sum_{j=1}^n |x_j - z_j|^2 < \mu^2 |x_0 - z_0|^2, x_0 < z_0 \right\}, \quad Z = (z_0, \dots, z_n).$$

Через $C^k(H_s)$, $k \geq 0$ будем обозначать пространство функций $\bar{u}(x_0)$, зависящих от параметра $x_0 \in [t_0, T]$ и принимающих значения в $H_s(\mathbb{R}_x^n)$, причем $\frac{\partial^j u(x_0)}{\partial x_0^j}$, $j = 0, 1, \dots, k$, существуют как элементы

$H_{s-j}(\mathbb{R}_x^n)$ и непрерывны в топологии $H_{s-j}(\mathbb{R}_x^n)$.

О п р е д е л е н и е. Задачу Коши

$$Pu = f, \quad \left. \frac{\partial^j u}{\partial x_0^j} \right|_{x_0=t_0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1)$$

будем называть корректной в Ω , если выполнены следующие условия:

I) существует целое число $\kappa \geq 0$ такое, что для любого целого $s \geq 0$ и любой $f \in C^\kappa(H_{s+\kappa})$ существует решение $u \in C^{m-1}(H_{s+m-1})$ задачи (1);

II) для всех решений $u \in C^{m-1}(H_{s+m-1})$ с константой $C_s > 0$ выполнена оценка

$$\| \| u(x_0, \tilde{x}) \| \|_{m-1, s+m-1}^2 \leq C_s \int_{t_0}^T \| f(x_0, \tilde{x}) \|_{\kappa, s+\kappa}^2 dx_0, \quad t_0 \leq x_0 \leq T;$$

III) для любого конуса $\Gamma(Z; \mu)$, $Z \in \Omega$, если $f \equiv 0$ в $\Gamma(Z; \mu) \cap \bar{\Omega}$, то $u \equiv 0$ в $\Gamma(Z; \mu) \cap \bar{\Omega}$.

Лемма 1. Если задача Коши (1) корректна в Ω , то существуют целое число $K > 0$ и константа $C > 0$ такие, что для всех $\Gamma(Z; \mu)$, $Z \in \Omega$, и всех $u \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнена оценка

$$\sup_{\Gamma(Z; \mu)} |u| \leq C \| Pu \|_{C^K(\overline{\Gamma(Z; \mu)})}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $Z \in \Omega$, $\Gamma(Z; \mu)$ — произвольный конус и $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Рассмотрим функцию

$$F = \begin{cases} L_\mu^R Pu & \text{в } \Gamma(Z; \mu) \cap \bar{\Omega}, \\ 0 & \text{в } \bar{\Omega} \setminus \Gamma(Z; \mu), \end{cases}$$

где $L_\mu = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \mu^2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, целое число $R > \kappa$.

Для решения задачи Коши

$$L_\mu^R Pv = F, \quad \left. \frac{\partial^j v}{\partial x_0^j} \right|_{x_0=t_0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, 2R + m - 1,$$

учитывая условие II), получим для $t_0 \leq x_0 \leq T$ оценку

$$\| \| v(x_0, \tilde{x}) \| \|_{m-1, R-\kappa+m-1}^2 \leq C' \int_{t_0}^T \| F \|_0^2 dx_0 \leq C'' \| Pu \|_{C^{2R}(\overline{\Gamma(Z; \mu)})}^2.$$

Если $R > \kappa - m + 1 + n/2$, то из теоремы вложения вытекает, что

$$\sup_{\Gamma(Z; \mu) \cap \bar{\Omega}} |v| \leq C''' \| Pu \|_{C^{2R}(\overline{\Gamma(Z; \mu)})}.$$

Из (III) следует, что $v \equiv u$ в $\Gamma(Z; \mu) \cap \Omega$ и, значит, выполнена (2).

Пусть дано разбиение переменных

$$x = x' + x'' = (x_0, x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, x_{d+1}, \dots, x_n),$$

соответствующее разбиение двойственных переменных

$$\xi = \xi' + \xi'' = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_d, 0, \dots, 0) + (0, \dots, 0, \xi_{d+1}, \dots, \xi_n)$$

и мультииндексов $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, $\beta = (\beta', \beta'')$.

Теорема. Пусть $\hat{x} \in \Omega$, целое число $r \geq 2$, рациональные числа $p > 0$, $q > 0$ такие, что $p \geq q$, и для всех $\xi'' \in \mathbf{R}^{n-d} \setminus \{0\}$

$$P_m^{(r, 0, \dots, 0)}(\hat{x}, \xi'') \neq 0, \quad (3)$$

$$P_{m, \beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \xi'') = 0, \quad \text{если } |\alpha| + p|\beta'| + q|\beta''| < r. \quad (4)$$

Тогда для корректности задачи Коши (1) необходимо, чтобы для всех ξ''

$$P_{s, \beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \xi'') = 0, \quad \text{если } |\alpha| + p|\beta'| + q|\beta''| + (m-s)(1+p) < r. \quad (5)$$

Изложим коротко идею доказательства теоремы. Без ограничения общности можно предполагать, что $\hat{x} = 0$. Сделаем замену переменных

$$y' = \rho^{\delta p} x', \quad y'' = \rho^{\delta q} x'', \quad (6)$$

где $\delta = (1 + p - q)^{-1}$, $\rho \geq 1$ — параметр.

Запишем оператор P в виде $P = Q_N + \rho^{-N} R_N$, где $N = K(1 + \delta p) + m + 1$,

$$Q_N = \sum_{\eta(s, \alpha', \beta) > -N} \rho^{\eta(s, \alpha', \beta)} \frac{y^\beta}{(\alpha')! \beta!} P_{s, \beta}^{(\alpha', 0)}(0, D_{y''}) \cdot D_{y'}^{\alpha'},$$

$$\eta(s, \alpha', \beta) = \delta[p(|\alpha'| - |\beta'|) + q(s - |\alpha'| - |\beta''|)],$$

R_N — дифференциальный оператор порядка m с коэффициентами, ограниченными равномерно по ρ в Ω вместе со всеми производными, $P_{s, \beta}^{(\alpha', 0)}$ означает соответствующую производную P_s по старым переменным.

Для оператора Q_N по методу Флашки и Стрэнга ⁽²⁾ строится асимптотическое решение

$$u_\rho = \sum_{k=0}^{N_1} v^k(y) \rho^{-k/\tau} \exp i \left(\sum_{j=0}^w l^j(y) \rho^{\sigma_j} \right), \quad (7)$$

где $1 = \sigma_0 > \sigma_1 > \dots > \sigma_w > 0$, τ — общий знаменатель всех σ_j .

Пусть задача (1) корректна в Ω , но условия (5) не выполнены. Пусть M — множество индексов (s, α', β) , для которых $s < m$, $|\alpha'| + p|\beta'| + q|\beta''| + (m - s)(1 + p) < r$ и $P_{s, \beta}^{(\alpha', 0)}(0, \xi'') \neq 0$ при некотором ξ'' . Обозначим

$$\zeta = \min_{(s, \alpha', \beta) \in M} \left(\frac{p|\beta'| + q|\beta''| + (m - s)(1 + p)}{r - |\alpha'|} \right)$$

и пусть $\hat{M}$ — множество индексов из M , для которых этот минимум достигается, причем $P_{s, \beta}^{(\alpha', 0)}(0, \xi'') \neq 0$ при одном и том же ξ'' .

Положим $\sigma_1 = \delta(1 - \zeta)$ и

$$u^1(y) = \exp i \left(\sum_{k=d+1}^n y_k \tilde{\xi}_k'' \gamma^{\sigma_1} + l^1(y) \rho^{\sigma_1} \right), \quad \gamma \in \mathbf{R}^1 \setminus \{0\}.$$

Тогда

$$Q_N u^1 = \rho^{m+\delta(qm-r\zeta)} [\Phi_1(y, \gamma, l_{y_0}^1, \dots, l_{y_d}^1) + o(1)] \cdot u^1,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1(y, \gamma, l_{y_0}^1, \dots, l_{y_d}^1) &= \frac{1}{r!} \sum_{|\alpha'|=r} P_m^{(\alpha', 0)}(0, \xi'') \gamma^{m-r} (l_{y_0}^1)^{\alpha_0} \dots (l_{y_d}^1)^{\alpha_d} + \\ &+ \sum_{(s, \alpha', \beta) \in \hat{M}} \frac{y^\beta}{(\alpha')! \beta!} P_{s, \beta}^{(\alpha', 0)}(0, \xi'') \gamma^{s-|\alpha'|} (l_{y_0}^1)^{\alpha_0} \dots (l_{y_d}^1)^{\alpha_d}. \end{aligned}$$

Лемма 2. *Существуют области $Y \subset \mathbf{R}^{n+1} \cap \{y_0 < 0\}$, $V \subset \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ такие, что для больших γ уравнение $\Phi_1(y, \gamma, \eta_0, \dots, \eta_d) = 0$ относительно η_0 имеет в $Y \times V$ корень $\eta_0 = F(y, \gamma, \eta_1, \dots, \eta_d)$ с равномерной кратностью $g_1 = r$, причем $\text{Im } F < -\delta_0 \mu$, где $\delta_0 > 0$ — фиксированное число.*

Пусть $(\tilde{y}_0, \dots, \tilde{y}_n, \tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_d) \in Y \times V$ и γ фиксировано так, что имеет место лемма 2. Решим задачу Коши

$$\begin{aligned} l_{y_0}^1 &= F(y, \gamma, l_{y_1}^1, \dots, l_{y_d}^1), \\ l^1|_{y_0=\tilde{y}_0} &= \sum_{k=1}^d y_k \tilde{\eta}_k + K_1, \quad K_1 = \text{const}. \end{aligned} \quad (8)$$

По теореме Коши — Ковалевской в некоторой области $Y_1 \subset Y$ существует

аналитическое решение $l^1(y)$ задачи (8). Предположим, что Y_1 столь мала, что для $y \in Y_1$ выполнено неравенство

$$2n \sum_{j=1}^n |\operatorname{Im} l_{v_j}^1(y)| < \delta_0,$$

а K , выбрана так, что $\operatorname{Im} l^1(y) < 0$ в Y_1 .

После того как σ_i и $l^1(y)$ определены, σ_j , $l^j(y)$ находятся по схеме в (2). Доказывается, что процесс определения σ_j после конечного числа шагов приведет к $\sigma_j = 0$, и затем находятся функции $v^k(y)$, $v^0(y) \neq 0$. Пусть N_1 фиксировано так, что $N_1/\tau > K + m + 1 + \delta(Kp + qm - r\xi)$. При таком выборе N_1 функции $l^j(y)$, $v^k(y)$ определяются в некоторой области $W \subset Y_1$, причем выполнено неравенство

$$\|Q_N u_\rho\|_{CK(\bar{W})} \leq O(\rho^{-K\delta p-1}) \sup_{\bar{W}} |u_\rho|. \quad (9)$$

Пусть $Z = (z_0, \dots, z_n) \in W$, $v^0(Z) \neq 0$. Рассмотрим конусы $\Gamma(Z_\rho; \mu)$, где $Z_\rho = (\rho^{-\delta p} z_0, \dots, \rho^{-\delta p} z_d, \rho^{-\delta q} z_{d+1}, \dots, \rho^{-\delta q} z_n) \in \Omega$. Если оценка (2) выполнена для всех $\Gamma(Z_\rho; \mu)$, то после замены переменных (6) получим, что для всех $u \in C_0^\infty(\Omega_\rho)$

$$\sup_{\bar{G}_\rho} |u| \leq \tilde{C} \rho^{K\delta p} \|P_u\|_{CK(\bar{G}_\rho)}, \quad (10)$$

где Ω_ρ — образ Ω , G_ρ — образ $\Gamma(Z_\rho; \mu)$, $\tilde{C}$ не зависит от ρ .

Рассмотрим функцию $\psi(y) = -\operatorname{Im} l^1(y)$. Имеем для $y \in G_\rho \cap W$

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \psi(Z) + \sum_{j=0}^n \psi_{y_j}(Z)(y_j - z_j) + O\left(\sum_{j=0}^n |y_j - z_j|^2\right) \leq \\ &\leq \psi(Z) + (z_0 - y_0) \cdot [(c_1 + c_2\mu)(z_0 - y_0) - \frac{1}{2}\psi_{y_0}(Z)], \end{aligned} \quad (11)$$

где константы c_1, c_2 не зависят от y .

Из (11) следует, что существуют константы $\delta_1 > 0$, $\eta_1 > 0$ такие, что $G_\rho \cap \{y_0 \geq z_0 - \delta_1\} \subset W$ и для $W_\rho = G_\rho \cap \{z_0 - \delta_1 \leq y_0 \leq z_0 - \frac{1}{2}\delta_1\}$ выполнено неравенство

$$\sup_{W_\rho} \psi(y) \leq \psi(Z) - \eta_1. \quad (12)$$

Пусть функция $\varphi(y_0) \in C_0^\infty$ такая, что $0 \leq \varphi(y_0) \leq 1$, $\varphi(y_0) \equiv 0$ для $|z_0 - y_0| \geq \delta_1$, $\varphi(y_0) \equiv 1$ для $|z_0 - y_0| \leq \frac{1}{2}\delta_1$. Тогда, учитывая (9), получим

$$\rho^{K\delta p} \|P(\varphi u_\rho)\|_{CK(\bar{G}_\rho)} \leq O(\rho^{-1}) \sup_{\bar{G}_\rho} |\varphi u_\rho| + O(\rho^{(m+K)(\delta p+1)+\delta m(p-q)}) \sup_{\bar{W}_\rho} |u_\rho|. \quad (13)$$

Из неравенств (12), (13) следует, что для больших ρ оценка (10) не выполнена и, следовательно, задача (1) не может быть корректной.

В заключение автор выражает благодарность О. А. Олейник за поддержку и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ., 1, № 1, 109 (1961). ² H. Flaschka, G. Strang, Advances in Math., 6, № 3, 347 (1971). ³ В. Я. Иврий, ДАН, 197, № 3, 517 (1974).