Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 513.82+511

МАТЕМАТИКА

С. С. РЫШКОВ

О ПОЛНЫХ ГРУППАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ АВТОМОРФИЗМОВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 II 1972)

В предлагаемой заметке находится связь между теорией полиэдра Вороного $\Pi(n)$ и теорией полных групп целочисленных автоморфизмов положительных квадратичных форм от n переменных (теорией n-мерных «арифметических голоэдрий»). На основе найденной связи строится алгорифм разыскания всех попарно неэквивалентных таких групп для любого n, а также указывается алгорифм разыскания группы * любой положительной квадратичной формы. Настоящая заметка является как бы продолжением работ [1, 2], где содержится большинство нужных нам определений, литература по данному вопросу и некоторые вводные замечания. Здесь мы считаем необходимым отметить только, что мостом между упомянутыми выше теориями является развитая Б. Н. Делоне и Н. Н. Сандаковой в работе [3] теория многообразий Бравэ, играющих большую роль в последних работах по n-мерной геометрической кристаллографии [2, 4–9]. В цитированной работе [3] была также впервые высказана весьма важная и плодотворная мысль о возможности разыскания групп целочисленных матриц через симметрии полиэдра приведения.

1. Рассмотрим эвклидово пространство E^N, где $N = {}^1/_2 n(n+1)$,— пространство коэффициентов квадратичных форм от n переменных, а в этом пространстве конус **K** положительных квадратичных форм и полиэдр Вороного $\Pi(n)$. Обозначим через $Б(n)$ барицентрическое подразделение [10] полиэдра $\Pi(n)$. Назовем произвольный (любой размерности) симплекс (симплициального) комплекса $Б(n)$ собственным, если он не лежит в границе конуса **K**.

Теорема 1. *Все, с точностью до целочисленной эквивалентности, полные группы целочисленных автоморфизмов положительных квадратичных форм от n переменных находятся среди групп квадратичных форм, изображаемых центрами тяжести всех попарно неэквивалентных собственных симплексов комплекса* $Б(n)$.

Теорема 1 вытекает из следующей фундаментальной, но очень просто доказываемой леммы.

Лемма 1. *Все квадратичные формы, изображаемые точками одного и того же (открытого) собственного симплекса комплекса* $Б(n)$ *имеют одну и ту же группу.*

Заметим, что запас рассматриваемых в теореме 1 симплексов во всех известных случаях (до $n = 6$), хотя и велик, но вполне обозрим, что, повидимому, делает вполне возможными соответствующие вычисления.

Рассмотрим теперь вместе с симплициальным комплексом «гоноэдральный комплекс» $Б(n)$, т. е. совокупность гоноэдров (бесконечных открытых пирамид) различных размерностей, построенных на симплексах комплекса $Б(n)$ и имеющих общую вершину — начало координат. Вместо комплекса $Б(n)$ можно рассматривать симплициальный комплекс — «сечение» комплекса $\widetilde{Б}(n)$ любой эллиптической [11] плоскостью, но это менее удобно.

* Здесь и дальше, говоря «группа положительной квадратичной формы f», мы будем подразумевать полную группу целочисленных автоморфизмов этой формы.

Линейным r-мерным подкомплексом комплекса $\widetilde{\text{Б}}(n)$ назовем такой r-мерный его подкомплекс, открытым ядром которого является пересечение с конусом **К** какой-нибудь r-мерной плоскости, проходящей через вершину конуса **К**.

Линейный подкомплекс комплекса Б(n) определяется по соответствию его симплексов гоноэдрам комплекса $\widetilde{\text{Б}}(n)$.

Теорема 2. *Каждое многообразие Бравэ есть открытое ядро тела линейного подкомплекса комплекса* $\widetilde{\text{Б}}(n)$.

Любой r-мерный гоноэдр из комплекса $\widetilde{\text{Б}}(n)$ (соответствующий ему симплекс из комплекса Б(n)) назовем продолжаемым, если он входит, по крайней мере, в один r-мерный линейный подкомплекс комплекса $\widetilde{\text{Б}}(n)$; каждый такой подкомплекс мы будем называть продолжением нашего гоноэдра (симплекса).

Два продолжаемых r-мерных гоноэдра (два соответствующих им $(r-1)$-мерных симплекса) назовем сопродолжаемыми, если они имеют общее продолжение.

Два продолжаемых r-мерных гоноэдра (два соответствующих им $(r-1)$-мерных симплекса) назовем слабо эквивалентными, если по крайней мере один из них эквивалентен сопродолжаемому с другим, в частности, если они сами сопровождаемы или эквивалентны.

Лемма 2. *Группы всех квадратичных форм, изображаемых точками двух произвольных сопродолжаемых гоноэдров, совпадают.*

Лемма 3. *Группы любых двух квадратичных форм, изображаемых точками двух произвольных слабо эквивалентных гоноэдров, целочисленно эквивалентны.*

Теорема 3. *Все, с точностью до целочисленной эквивалентности, полные группы целочисленных автоморфизмов положительных квадратичных форм от n переменных находятся среди групп квадратичных форм, изображаемых центрами тяжести всех попарно слабо не эквивалентных продолжаемых симплексов комплекса* Б (n).

Заметим, что запас симплексов, изучаемых в теореме 3, много меньше запаса симплексов, изучаемых в теореме 1.

2. Разыскав, например, методами следующего параграфа, группы предложенных в теореме 3 форм, мы легко ([3], [4]) определим некоторый набор многообразий Бравэ. Выбросим из этого набора те r-мерные, $r = 1, 2, 3, \ldots, N$, многообразия Бравэ, которые получены только с помощью симплексов размерности меньшей, чем $(r-1)$. Множество оставшихся многообразий Бравэ обозначим через $R(n)$.

Теорема 4. *Для каждого n множество $R(n)$ есть полный, без повторений набор попарно неэквивалентных многообразий Бравэ.*

3. Здесь мы коснемся вопроса о вычислении группы произвольной положительной квадратичной формы f от n переменных, при этом будем считать, что в исследуемой размерности полиэдр $\Pi(n)$ известен. В этом параграфе группой грани F (произвольной размерности) полиэдра $\Pi(n)$ мы будем называть такую полную группу G_F целочисленных подстановок n переменных квадратичных форм, что грань F инвариантна относительно группы G_F или, точнее, относительно группы $\mathfrak{G}_F$, порожденной (см., например, ([1])) группой G_F.

Отметим сперва, что группу произвольной совершенной формы и тем самым группу произвольной $(N-1)$-мерной грани полиэдра $\Pi(n)$ можно найти, например, разыскав сперва группу многогранника — выпуклой оболочки совокупности минимальных векторов этой формы, а затем выписав соответствующие элементы этой группы подстановки.

Группу G_F произвольной (произвольной размерности) грани F полиэдра $\Pi(n)$ можно разыскать следующим образом. Пусть грань F есть грань некоторой $(N-1)$-мерной грани F_1, и пусть G_1 — группа этой грани, а G_1' — группа тех подстановок из группы G_1, которые переводят грань F

в себя. Пусть, далее, $F_1, F_2, \ldots, F_m$ — грани, эквивалентные грани F_1 и содержащие грань F. Нетрудно, например с помощью алгорифма приведения по Вороному ([12], § 27), найти подстановки, осуществляющие эту эквивалентность. Для некоторых из этих граней (только они нам и потребуются) можно найти такие подстановки, которые переводят грань F_i в грань F_1, оставляя грань F инвариантной. Полученные подстановки суть образующие некоторой конечной подгруппы G' группы G_F. Очевидна следующая

Теорема 5. *Группа G_F есть произведение своих подгрупп G_1' и G'.*

Пусть теперь дана произвольная положительная квадратичная форма f от n переменных. Определив грань F полиэдра $\Pi(n)$, которой принадлежит точка, изображающая эту (или ей пропорциональную) форму, мы найдем группу формы f как множество подстановок конечной группы G_F, оставляющих форму f инвариантной.

В заключение отметим, что группы практически всех известных совершенных форм вычислены (см., например, [13]).

4. Здесь мы рассмотрим, по-видимому, последний оставшийся вопрос — вопрос выбора из всех многообразий Бравэ или, например, из набора, получаемого с помощью теоремы 1 из [1], тех многообразий Бравэ, которые соответствуют максимальным группам, а также связанный с ним вопрос вложения групп квадратичных форм друг в друга и в максимальные такие группы, т. е. в максимальные конечные группы целочисленных матриц.

Для решения этого вопроса достаточно рассмотреть приведенные, в данном случае по Вороному, части многообразий Бравэ, которых для каждого многообразия лишь конечное число [3]. Заметим, что разыскание таких приведенных частей можно делать, подобно тому, как поступает Г. Ф. Вороной в § 25 работы [12], переходом от симплекса к смежным симплексам линейного соответствующего каждому заданному многообразию Бравэ подкомплекса комплекса $Б(n)$. После того, как найдены эти приведенные части, для решения наших вопросов достаточно установить систему вложений многообразий Бравэ друг в друга и воспользоваться тем тривиальным фактом, что вложению одного многообразия Бравэ в другое отвечает обратное включение соответствующих им групп, и наоборот. В частности, многообразия Бравэ, не включающие в себя в виде подмножеств других многообразий Бравэ, соответствуют максимальным группам.

Отметим, что приведенными здесь соображениями можно воспользоваться и для выделения подмножества всех попарно неэквивалентных многообразий Бравэ из любого заданного их набора, например из наборов, получаемых с помощью теоремы 1 или 3.

Эта работа является ответом на вопрос Б. Н. Делоне [13], которому автор выражает благодарность за внимание к работе.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Рышков, ДАН, 204, № 3 (1972). [2] С. С. Рышков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова СССР, 128 (1972). [3] Б. Н. Делоне, Н. Н. Сандакова, Там же, 64, 28 (1961). [4] Р. В. Галиулин, С. С. Рышков, Сборн. Проблемы кристаллологии, М., 1971, стр. 290. [5] J. Neubüser, H. Wondratschek, R. Bülow, Acta crystallogr., A—27, 517 (1971). [6] R. Bülow, J. Neubüser, H. Wondratschek, Acta crystallogr., A—27, 520 (1971). [7] H. Wondratschek, R. Bülow, J. Neubüser, Acta crystallogr., A—27, 523 (1971). [8] М. И. Шигорин, Сборн. Проблемы кристаллологии, М., 1971, стр. 299. [9] Б. Н. Делоне, М. И. Шигорин, Сборн. памяти академика А. В. Шубникова, в печати. [10] П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947, стр. 160. [11] Б. Н. Делоне, С. С. Рышков, ДАН, 173, № 5 (1967). [12] Г. Ф. Вороной, Собр. соч., 2, Киев, 1952, стр. 171. [13] H. S. M. Coxeter, Canad. Math. J., 3, 391 (1951). [14] Б. Н. Делоне. Сборн. Проблемы Гильберта, М., 1969, стр. 202.