Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 517.92 **МАТЕМАТИКА**

В. С. САМОВОЛ

О ЛИНЕАРИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 II 1972)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$du/dt = Au + \Phi(u, t), \tag{α}$$

где u, $\Phi(u, t)$ — векторы из R^n, $\Phi(u, t)$ — функция класса C^∞ по u в некоторой окрестности нуля, непрерывная, периодическая по t с периодом 1, $|\Phi(u, t)| = o(|u|)$. Матрица A не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью.

Изучается вопрос о возможности приведения системы (α) с помощью преобразования $u = v + \Omega(v, t)$ к виду $dv/dt = Av$, где $\Omega(v, t)$ — гладкая функция, периодическая по t с периодом 1, $|\Omega(v, t)| = o(|v|)$.

Вначале будем рассматривать систему уравнений

$$dx/dt = Q(x), \tag{1}$$

где x, $Q(x)$ — векторы из R^n, $Q(x)$ — функция класса C^∞ в некоторой окрестности нуля, $Q(0) = 0$, матрица $A = Q'(0)$ не имеет собственных чисел с нулевой действительной частью. (Требование $Q(x) \in C^\infty$ можно ослабить до $Q(x) \in C^N$, где N достаточно велико.)

Изучается вопрос о возможности приведения в достаточно малой окрестности нуля системы (1) с помощью невырожденного диффеоморфизма

$$x = g(y) \tag{2}$$

к виду

$$dy/dt = Ay. \tag{3}$$

Топологическая эквивалентность окрестностей нуля систем (1) и (3) доказана в ([5]). Случай аналитических $Q(x)$ и $g(y)$ исследован в работах ([2-4]).

Необходимым и достаточным условием существования бесконечно дифференцируемого преобразования (2) является отсутствие соотношений

$$\lambda_i = \sum_{s=1}^{n} k_s \lambda_s, \tag{4}$$

где k_s — целые, неотрицательные числа, $\sum_{s=1}^{n} k_s > 1$, λ_s — собственные числа матрицы A (см. ([1]), стр. 307—308).

Если соотношения (4) имеют место, то хорошо известен пример системы вида (1), где $Q(x)$ — аналитическая функция, но не существует преобразования (2) класса C^1 (см. ([9])). Стернберг в ([10]) доказал, что если $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $Q(x) \in C^k$, $|Q(x) - Ax| = o(|x|^k)$, $k > (\max_i \operatorname{Re}\lambda_i)/(\min_i \operatorname{Re}\lambda_i)$, то существует преобразование (2) класса C^k.

Достаточное условие существования преобразования (2) класса C^k при произвольных λ_i и $Q(x) \in C^N$ состоит в отсутствии равенств (4) для $2 \leqslant \sum_{s=1}^{n} k_s \leqslant N$, где N — число, существование которого дается теоремой 12.3 из ([1]), стр. 310. Результат, уточняющий эту теорему, получен в ([6]). Этот результат в применении к системе (1) оказывается следствием теоремы 1, приводимой ниже. Перейдем теперь к изложению полученных результатов.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2\beta}$ — комплексные корни матрицы A, а $\lambda_{2\beta+1}, \ldots, \lambda_{2\beta+\alpha}$ — действительные, $\alpha + 2\beta = n$. Будем рассматривать систему уравнений

$$\frac{dw_i}{dt} = \varepsilon_i w_{i-1} + \lambda_i w_i + \sum_{s=s_1}^{N} p_s^i(w_1, \ldots, w_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5}$$

$s_1 \geqslant 2$; w_i — комплексные координаты, $w_{i+\beta} = \overline{w}_i$, $\varepsilon_{i+\beta} = \varepsilon_i$, $\lambda_{i+\beta} = \overline{\lambda}_i$, $p_s^{i+\beta}(w_1, \ldots, w_n) = \overline{p_s^i(w_1, \ldots, w_n)}$, $1 \leqslant i \leqslant \beta$; $\varepsilon_i = 0$ или ε (ε достаточно мало), $\varepsilon_i = 0$, если $\lambda_i \neq \lambda_{i-1}$;

$$p_s^i(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{i_1 + \ldots + i_n = s} a^i_{i_1 \ldots i_n} \cdot w_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot w_n^{i_n}, \quad \sum_{q=1}^{n} i_q \lambda_q = \lambda_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

К такому виду всегда можно привести систему (1) преобразованием сколь угодно высокого конечного класса гладкости.

Перенумеруем координаты $w_1, \ldots, w_n$ так, чтобы система (5) приняла вид

$$\frac{dw_i}{dt} = \varepsilon_i w_{i-1} + \lambda_i w_i + \sum_{s=s_1}^{N} p_s^i(w_1, \ldots, w_n), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5*}$$

где $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $n_1 + 1 \leqslant i \leqslant n_1 + n_2$, $\operatorname{Re}\lambda_{i+1} \geqslant \operatorname{Re}\lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant n_1 - 1$, $|\operatorname{Re}\lambda_{i+1}| \geqslant |\operatorname{Re}\lambda_i|$, $n_1 + 1 \leqslant i \leqslant n - 1$, $n = n_1 + n_2$.

Теорема 1. *Для того чтобы существовал невырожденный диффеоморфизм класса C^k, приводящий систему (5*) к линейному виду, достаточно, чтобы для каждого набора $(i, i_1, \ldots, i_n)$ такого, что $a^i_{i_1, \ldots, i_n} \neq 0$, выполнялось одно из следующих n условий*:

$$i_1 \operatorname{Re}\lambda_1 + \ldots + i_r \operatorname{Re}\lambda_r > k \operatorname{Re}\lambda_r, \quad r = 1, \ldots, n_1;$$
$$i_{n_1+1}|\operatorname{Re}\lambda_{n_1+1}| + \ldots + i_{n_1+q}|\operatorname{Re}\lambda_{n_1+q}| > k|\operatorname{Re}\lambda_{n_1+q}|, \quad q = 1, \ldots, n_2.$$

Замечание. Можно доказать, что условие теоремы 1 неулучшаемо, а именно, что система

$$dw_1/dt = \lambda_1 w_1, \quad dw_2/dt = \lambda_2 w_2 + c w_1^{s_1} w_2^{s_2},$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, $s_1\lambda_1 + s_2\lambda_2 = \lambda_2$, $s_1 \leqslant k$, $s_2 \leqslant k$, $c \neq 0$, $s_1 + s_2 > 1$, не приводится к линейному виду преобразованием класса C^k.

Также можно доказать, что система

$$dx_i/dt = \lambda_i x_i, \quad 1 \leqslant i < n; \quad dx_n/dt = \lambda_n x_n + a \cdot x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{n-1}^{i_{n-1}},$$

где $\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, $\sum_{s=1}^{n-1} i_s \lambda_s = \lambda_n$, $\sum_{s=1}^{n-1} i_s \geqslant 2$, $a \neq 0$, $\lambda_{i+1} \geqslant \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\sum_{p=1}^{m} i_p \lambda_p \leqslant k\lambda_m$ для всех $1 \leqslant m \leqslant n-1$, не приводится к линейному виду преобразованием класса C^k.

Приведем доказательство теоремы 1 в случае, когда $\varepsilon_i = \operatorname{Im}\lambda_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Рассмотрим линейную систему

$$d\xi_i / dt = \lambda_i \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Будем искать диффеоморфизм, приводящий систему (6) к системе (5*), в виде

$$w_i = \xi_i + f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C^k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Функции $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_1} \cdot \lambda_1 \xi_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial \xi_n} \cdot \lambda_n \xi_n = \lambda_i f_i + \sum_{s=s_1}^{N} p_s^i (\xi_1 + f_1, \ldots, \xi_n + f_n),$$
$$i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Характеристической системой уравнений для системы (7) назовем систему

$$\dot{\xi}_i = \lambda_i \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\dot{f}_j = \lambda_j f_j + \sum_{i_1 + \ldots + i_n = s_1}^{N} a^j_{i_1 \ldots i_n} (\xi_1 + f_1)^{i_1} \ldots (\xi_n + f_n)^{i_n}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{8}$$

Пусть $m(i_1, \ldots, i_n)$ есть то число m, при котором либо

$$\sum_{s=1}^{m} i_s \lambda_s > k\lambda_m, \quad 1 \leqslant m \leqslant n_1, \tag{9}$$

либо

$$\sum_{s=n_1+1} i_s |\lambda_s| > k |\lambda_m|, \quad n_1 + 1 \leqslant m \leqslant n_1 + n_2. \tag{10}$$

Если $a^i_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$, то для набора $(i_1, \ldots, i_n)$ число $m(i_1, \ldots, i_n)$ существует в силу условий теоремы. Каждому целому числу k, $1 \leqslant k \leqslant n$, сопоставим функцию

$$\rho_k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \begin{cases} (|\xi_1|^2)^{M/\lambda_1} + \ldots + (|\xi_k|^2)^{M/\lambda_k}, & 1 \leqslant k \leqslant n_1, \\ (|\xi_{n_1+1}|^2)^{M/|\lambda_{n_1+1}|} + \ldots + (|\xi_k|^2)^{M/|\lambda_k|}, & n_1 + 1 \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Здесь M — достаточно большое число.

Тогда каждому набору $(i_1, \ldots, i_n)$, для которого существует $m(i_1, \ldots, i_n)$, отвечает функция $\rho_{m(i_1, \ldots, i_n)}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Можно доказать, что функция $\xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n} \ln \rho_{m(i_1, \ldots, i_n)}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ принадлежит классу $C^{k+\delta}$, $0 < \delta < 1$.

В случае когда условие $\{\varepsilon_i = \operatorname{Im} \lambda_i = 0, i = 1, \ldots, n\}$ не выполнено, функции $\rho_k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ выбираются более сложным, специальным образом.

Наша цель привести систему (8) к виду

$$\dot{\eta}_i = \lambda_i \eta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$\dot{u}_j = \lambda_j u_j + \Phi_{j1}(u_1, \ldots, u_n, \quad \eta_1, \ldots, \eta_n) + \Phi_{j2}(\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

где Φ_{j1}, Φ_{j2} — функции класса $C^{k+\delta}$, $0 < \delta < 1$;

$$\Phi_{j1}(0, \ldots, 0, \ \eta_1, \ldots, \eta_n) = 0,$$
$$\Phi_{j2}(\eta_1, \ldots, \eta_n) =$$
$$= \sum_{j_1 + \ldots + j_n = L}^{N_1} b^j_{j_1 \ldots j_n} (\ln \rho_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \ln \rho_n(\eta_1, \ldots, \eta_n)) \, \eta_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \eta_n^{j_n},$$

$b^j_{j_1 \ldots j_n}$ — полиномы от своих аргументов, L — достаточно большое число.

Это достигается преобразованием вида

$$\xi_i = \eta_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$f_j = u_j + \varphi_j(\eta_1, \ldots, \eta_n), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где

$$\varphi_j(\eta_1, \ldots, \eta_n) =$$

$$= \sum_{j_1+\ldots+j_n=2}^{N_2} c^j_{j_1\ldots j_n}(\ln\rho_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \ldots, \ln\rho_n(\eta_1, \ldots, \eta_n))\,\eta_1^{j_1}\cdot\ldots\cdot\eta_n^{j_n},$$

$c^j_{j_1\ldots j_n}$ — полиномы от своих аргументов, φ_j — функции класса $C^{k+\delta}$.

Одновременно с системой (11) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot\delta_i &= \lambda_i\delta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ \dot v_j &= \lambda_j v_j + \Phi_{j1}(v_1, \ldots, v_n, \delta_1, \ldots, \delta_n), \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{12}$$

Так как функции Φ_{j1}, $\Phi_{j2} \in C^{k+\delta}$ и порядок функций Φ_{j2} при достаточно большом L достаточно велик, то с помощью теоремы 12.3 из ([1]), стр. 310, можно показать, что существует диффеоморфизм

$$\begin{aligned} \eta_i &= \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ u_j &= v_j + B_j(\delta_1, \ldots, \delta_n, v_1, \ldots, v_n), \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{13}$$

переводящий систему (12) в систему (11), причем $B_j(\delta_1, \ldots, \delta_n, 0, \ldots, 0) \in C^k$. Но отсюда нетрудно видеть, что отображение

$$w_i = \xi_i + f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) = B_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, 0, \ldots, 0) + \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C^k$, является искомым, чем и доказана теорема.

Рассмотрим теперь систему (α). Подобные системы рассматривались в ([7], [8]).

Рассмотрим две системы вида (α):

$$du_1/dt = Au_1 + \Phi_1(u_1, t), \tag{14}$$

$$du_2/dt = Au_2 + \Phi_2(u_2, t). \tag{15}$$

Лемма. *Для каждого целого $k > 0$ найдется $N = N(k, A)$ такое, что если $|\Phi_1(w, t) - \Phi_2(w, t)| \leqslant c|w|^N$ при малых $|w|$, то существует преобразование $u_2 = u_1 + F(u, t)$ класса C^k по u_1, непрерывно дифференцируемое и периодическое по t с периодом 1 такое, что система* (14) *переходит в систему* (15).

Теорема 2. *Для каждого целого $k > 0$ найдется $N = N(k, A)$ такое, что система (α) преобразованием вида $w = u + W(u, t)$ класса C^k по u непрерывно дифференцируемым и периодическим по t с периодом 1 приводится к автономной системе вида* (5).

Таким образом, вопрос о линеаризации системы (α) сводится к вопросу о линеаризации системы (5), который решается теоремой 1.

Автор выражает благодарность В. А. Кондратьеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 11 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1970. [2] А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.—Л., 1947. [3] К. Л. Зигель, Математика, 5, 2, 119 (1961). [4] А. Д. Брюно, Тр. Московск. матем. общ., 25 (1971). [5] Д. М. Гробман, Матем. сборн., 56 (98), в. 1, 77 (1962). [6] Г. Р. Белицкий, ДАН, 191, № 3, 515 (1970). [7] Л. Э. Рейзинь, Матем. сборн., 63 (105), в. 3, 392 (1964). [8] А. М. Самойленко, Изв. АН СССР, сер. матем., 30, 5, 1047 (1966). [9] P. Hartman, Proc. Am. Math. Soc., 11, 610 (1960). [10] S. Sternberg, Am. J. Math., 79, 809 (1957).