

УДК 539.12

В.В. АНДРЕЕВ, А.А. ЮЧКО

РЕЛЯТИВИСТСКИЙ МЕЖКВАРКОВЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

В работе предложена методика расчета потенциалов взаимодействия в импульсном пространстве, основанная на точном вычислении лоренц-структур соответствующих амплитуд взаимодействия. С помощью метода получено ядро КХД-мотивированного потенциала релятивистской системы кварк – антикварк с разными массами и с произвольным моментом количества движения J . Расчет произведен с учетом аномальных хромодинамических моментов кварков. Рассмотрен случай синглетного состояния релятивистской кварковой системы.

Введение

Изучение связанных состояний в физике элементарных частиц является одним из важнейших и эффективных методов исследования свойств, составляющих систему частиц, включая динамику их взаимодействия. Такой метод при описании мезонов и барионов в рамках составной кварковой модели является особенно актуальным, поскольку кварки не наблюдаются в свободном состоянии.

Для описания свойств мезонов существует большое количество моделей. Основной способ описания связанных систем в релятивистской квантовой теории поля базируется на четырехмерном ковариантном уравнении Бете – Солпитера [1]. Однако трудности этого способа описания привели к многообразным подходам, которые можно рассматривать как редукции уравнения Бете – Солпитера. Различные формы этих редукций можно найти в работах Солпитера [2], Логунова – Тавхелидзе [3], Кадышевского [4], Тодорова [5], Гросса [6], Кейстера – Полизоу [7] и т.д.

Важнейшей задачей таких моделей является определение потенциала взаимодействия кварков и расчет спектра масс связанной системы. Хотя КХД-мотивированному потенциалу, предложенному для описания кваркониев с тяжелыми кварками [8], уже больше 30 лет, однако задача нахождения релятивистского межкваркового потенциала до конца не решена.

Цель данной работы – получить ядро радиального уравнения релятивистской системы кварк – антикварк с произвольным моментом количества движения на основе амплитуды одноглюонного обмена и требования записания кварков в рамках пуанкаре-ковариантной модели, основанной на релятивистской гамильтоновой динамике (РГД). Причем, в отличие от других работ [9], мы точно рассчитываем данное ядро в импульсном пространстве, а не делаем разложений по скоростям кварков. Таким образом, мы учитываем все возможные релятивистские эффекты в данном приближении. Знание этого ядра интегрального уравнения РГД позволит далее перейти к процедуре численного решения и получения спектра масс кваркония.

1. Описание кваркония в РГД

В пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на РГД, «создание» релятивистской связанной системы начинают с построения двухчастичной системы кварков с импульсами $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и массами m_q и m_Q , которая описывается с использованием унитарных представлений группы Пуанкаре. Затем вводят взаимодействие $\hat{V}$ таким образом, чтобы выполнялось требование пуанкаре-инвариантности для системы взаимодействующих частиц, реализуемое в виде алгебры Пуанкаре на множестве динамических наблюдаемых систем.

Для разделения относительного движения и движения центра инерции в пуанкаре-ковариантной модели импульсы кварков $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ могут быть преобразованы к общему импульсу $\mathbf{P}$ и относительному импульсу $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad \mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) + \frac{\mathbf{P}}{M_0} \left(\frac{m_Q^2 - m_q^2 - M_0 [\omega_{m_Q}(p_2) - \omega_{m_q}(p_1)]}{\omega_{M_0}(P) + M_0} \right). \quad (1)$$

В уравнении (1) мы ввели инвариантную массу двух невзаимодействующих кварков

$$M_0 = \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k), (k = |\mathbf{k}|), \quad (2)$$

с функцией $\omega_m(p) = \sqrt{m^2 + p^2}$.

Оператор массы M для связанной системы с импульсом $\mathbf{Q}$, спином J и проекцией спина μ является суммой оператора M_0 (2) и феноменологического запирающего потенциала V . Волновая функция (ВФ) связанной системы спинорных кварков в РГД удовлетворяет в общем случае трехмерному интегральному уравнению [7]

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int < \mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2 \| \hat{V} \| \mathbf{k}', \lambda_1, \lambda_2 > \Psi_{\mathbf{Q}; \lambda_1 \lambda_2}^{J\mu}(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' = (M_{\text{мезон}} - M_0) \Psi_{\mathbf{Q}; \sigma_1 \sigma_2}^{J\mu}(\mathbf{k}) \quad (3)$$

с редуцированным матричным элементом и собственными значениями $M_{\text{мезон}}$.

Для получения одномерного радиального уравнения используем разложение Клебша – Гордана группы Пуанкаре. Поскольку для аналитического расчета ядра удобно использовать спиральные состояния кварков, а для классификации связанных состояний используют орбитальный момент L , полный спин S и полный момент количества движения J , вычисление ядра выполним в два этапа. На первом этапе, в системе центра инерции $\mathbf{Q} = 0$, строим состояние с квантовыми числами J, μ и со спиральностями кварков λ_1, λ_2 , которые формируют базис неприводимого двухчастичного пространства группы Пуанкаре – $|\mathbf{Q} = 0, J, \mu, k, \lambda_1, \lambda_2\rangle$. На втором этапе с помощью коэффициентов Клебша – Гордана группы вращений $C_{\lambda_1 - \lambda_2 \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S}$ и $C_{0 \lambda \lambda}^{L \ S \ J}$ получим базис состояний с квантовыми числами J, μ, L, S :

$$|k, J, \mu, L, S\rangle = \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} C_{\lambda_1 - \lambda_2 \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S} C_{0 \lambda \lambda}^{L \ S \ J} |k, J, \mu, \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (4)$$

Радиальное уравнение для двухчастичного связанного состояния в системе центра инерции имеет вид

$$\sum_{L', S'} \int_0^\infty V_{L', S'; L, S}^J(k, k') \Psi_{L', S'}^{J\mu}(k') k'^2 dk' = (M_{\text{мезон}} - M_0) \Psi_{L, S}^{J\mu}(k), \quad (5)$$

где соответствующий оператор $V_{L', S'; L, S}^J(k', k) = \langle k', J, \mu, L', S' \| \hat{V} \| k, J, \mu, L, S \rangle$ потенциала системы кварк – антикварк определяется соотношением

$$V_{L', S'; L, S}^J(k', k) = \frac{\sqrt{(2L+1)(2L'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1', \lambda_2'} C_{\lambda_1 - \lambda_2 \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S} C_{0 \lambda \lambda}^{L \ S \ J} C_{\lambda_1' - \lambda_2' \lambda'}^{1/2 \ 1/2 \ S'} C_{0 \lambda' \lambda'}^{L' \ S' \ J} V_{\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k), \quad (6)$$

а матричный элемент $V_{\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k)$ – посредством вычисления интеграла

$$V_{\lambda_1', \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k) = \int_{-1}^1 d(\cos \beta) \int_0^{2\pi} d\phi D_{\lambda, \lambda'}^J(\phi, \beta, -\phi) \langle \mathbf{k}', \lambda_1', \lambda_2' \| \hat{V} \| \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (7)$$

с $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ и $\cos \beta = (\mathbf{k} \mathbf{k}') / (|\mathbf{k}| |\mathbf{k}'|)$. Функция $D_{\mu \lambda}^J(\phi, \theta_k, -\phi_k)$ задает матрицы неприводимого представления группы $SU(2)$ индекса J . Явный вид матрицы D^J определяется через сферические углы вектора относительного движения $\hat{\mathbf{k}}$ (1).

2. Процедура нахождения межкваркового потенциала

С помощью КХД находим пертурбативную (короткодействующую) часть потенциала посредством вычисления амплитуды упругого рассеяния $T_{\text{н}}$ для частиц, составляющих связанную систему (детали этой процедуры можно найти, например, в [10]). Матричный элемент потенциала (6) выражается через амплитуду рассеяния $T_{\text{н}}$ посредством формулы [10]

$$\langle \mathbf{P}, k, \sigma_1, \sigma_2 | \hat{V} | \mathbf{P}', k', \lambda_1, \lambda_2 \rangle = -(2\pi)^3 \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) T_{\text{н}}. \quad (8)$$

Такое вычисление, как правило, делают приближенно, применяя разложение по скоростям v/c частиц системы. Далее рассчитывают потенциал в координатном пространстве $V(\mathbf{r})$ как преобразование Фурье вышеупомянутой амплитуды рассеяния, которое часто требует дополнительных допущений в связи с появлением расхождений при вычислениях интегралов. В данном подходе получим точное аналитическое выражение для радиального ядра уравнения релятивистской кварковой системы, тем самым существенно повысив точность последующих численных результатов.

В первом ненулевом порядке теории возмущений вклад в ядро уравнения (3) дает одноглюонный обмен между кварком и антикварком. Этот вклад V_{pert} в системе центра инерции определяется выражением

$$\langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | \hat{V}_{\text{pert}} | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle = \frac{4\pi N_{k,k'}}{(2\pi)^3} \frac{\alpha_s(q^2)}{3q^2} \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \gamma^\mu u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \bar{v}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \gamma_\mu v_{\lambda_{p_2}}(p_2), \quad (9)$$

где $q = p_1 - k_1 = k_2 - p_2$ – переданный импульс; α_s – постоянная взаимодействия в КХД;

$N_{k,k'} = 1/\sqrt{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_Q}(k)\omega_{m_q}(k')\omega_{m_Q}(k')}$ и

$$k_1 = (\omega_{m_q}(k), \mathbf{k}), p_1 = (\omega_{m_q}(k'), \mathbf{k}'), k_2 = (\omega_{m_Q}(k), -\mathbf{k}), p_2 = (\omega_{m_Q}(k'), -\mathbf{k}'). \quad (10)$$

Получение дальнедействующей (запирающей) составляющей межкваркового потенциала можно провести исходя из анализа лоренц-структуры потенциала и экспериментальных данных по спектру масс мезонов. Анализ приводит к тому, что непертурбативная часть межкваркового потенциала определяется как сумма векторной ($-K_V(q^2)$) и скалярной ($-K_S(q^2)$) запирающих частей:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}', \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2} | \hat{V}_{\text{conf}} | \mathbf{k}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2} \rangle = & \frac{N_{k,k'}}{4(2\pi)^3} \left[K_V(q^2) \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \left(\gamma_\mu + \frac{i\kappa_q}{2m_q} \sigma_{\mu\nu} (p_1 - k_1)^\nu \right) u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \times \right. \\ & \left. \times \bar{v}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \left(\gamma^\mu + \frac{i\kappa_Q}{2m_Q} \sigma^{\mu\nu} (k_2 - p_2)_\nu \right) v_{\lambda_{p_2}}(p_2) + K_S(q^2) \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \bar{v}_{\lambda_{k_2}}(k_2) v_{\lambda_{p_2}}(p_2) \right], \quad (11) \end{aligned}$$

где функции $K_{V,S}(q^2)$ и должны «обеспечить» запирание кварков в мезоне. Так же как и в работе [9], предположим, что кварки обладают аномальным хромодинамическим моментом κ .

3. Расчет спинорной части потенциала

Расчет $\langle \mathbf{k}', J, \lambda'_1, \lambda'_2 | \hat{V} | \mathbf{k}, J, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ (7), посредством которого определяется ядро интегрального уравнения (5), проведем в два этапа. Сначала вычислим спинорную часть потенциала $\langle \mathbf{k}', \lambda'_1, \lambda'_2 | \hat{V} | \mathbf{k}, \lambda_1, \lambda_2 \rangle$, а затем проведем интегрирование по угловым переменным.

Спинорную часть уравнений (9),(11) рассчитаем с помощью метода базисных спиноров [11]. В данном подходе фермионная цепочка с оператором Q , который выражается через комбинацию матриц Дирака, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) Q u_{\lambda_k}(k, s_k) = & \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) u_\sigma(b_C) \{ \bar{u}_{-\sigma}(b_{-C}) Q u_\rho(b_A) \} \bar{u}_{-\rho}(b_{-A}) u_{\lambda_k}(k, s_k) = \\ & = \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{s}_{\lambda_p, \sigma}^{(C)}(p) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A}[Q] s_{\rho, \lambda_k}^{(A)}(k), \quad (12) \end{aligned}$$

где коэффициенты разложения по базисным спинорам для спиральных состояний определены посредством соотношения

$$s_{\rho, \lambda_k}^{(A)}(k) = (-2\lambda_k) D_{A \rho/2, -\lambda_k}^{*1/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) W_{m_k}(2\rho\lambda_k \cdot k) \quad (13)$$

со вспомогательной функцией

$$W_{m_k}(\pm k) = \sqrt{\omega_{m_k}(k) \pm k}, \quad \omega_{m_k}^2(k) - |\mathbf{k}|^2 = m_k^2. \quad (14)$$

Конструкция Γ

$$\Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A}(\mathcal{Q}) \equiv \bar{u}_{-\sigma}(b_{-C}) \mathcal{Q} u_{\rho}(b_A) \quad (15)$$

вычисляется через 4-векторы b_A и $n_{\lambda}(A, \lambda = \pm 1)$ посредством соотношений [11]

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu} u_{\lambda}(b_A) &= 2b_A^{\mu} u_{-\lambda}(b_{-A}) - 2A n_{-A \times \lambda}^{\mu} u_{-\lambda}(b_A), \\ \gamma_5 u_{\rho}(b_A) &= \rho u_{\rho}(b_A), \quad \bar{u}_{\lambda}(b_C) u_{\rho}(b_A) = \delta_{\lambda, -\rho} \delta_{C, -A}. \end{aligned} \quad (16)$$

Векторы b_A и n_{λ} образуют изотропную тетраду пространства Минковского

$$b_A = 1/2(l_0 + A l_3), n_{\lambda} = 1/2(\lambda l_1 + i l_2), \quad A, \lambda = \pm 1, \quad (17)$$

где 4-векторы l_A ($A = 0, 1, 2, 3$) определяют ортонормированный базис данного пространства с метрическим тензором g , т.е. $(l_A l_B) = g_{AB}$. Заметим, что коэффициенты разложения строятся таким образом, чтобы закон преобразования двухчастичного состояния соответствовал группе Пуанкаре. Это дает возможность применить теорему Вигнера – Эккарта для матричных элементов, определяющих потенциал. В итоге, подынтегральная часть выражения (7) для пертурбативной части потенциала (9), после использования свойств D -функций, запишется в виде

$$\begin{aligned} & D_{\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2}}^{*J}(\varphi, \beta, -\varphi) \bar{u}_{\lambda_{p_1}}(p_1) \gamma^{\mu} u_{\lambda_{k_1}}(k_1) \bar{u}_{\lambda_{k_2}}(k_2) \gamma_{\mu} u_{\lambda_{p_2}}(p_2) = \\ & = 2 \left[\delta_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} K_{\lambda_{p_1}, -\lambda_{p_2}}^{-\lambda_{k_1}, \lambda_{k_1}}(\beta) \left(\sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k_1}, \lambda_{p_1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \right) \left(\sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k_1}, \lambda_{p_1}}^{\sigma, m_Q}(k, k') \right) + \right. \\ & \left. + K_{\lambda_{p_1}, -\lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, -\lambda_{k_2}}(\beta) \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{\lambda_{k_1}, \lambda_{p_1}}^{\sigma, m_q}(k, k') W_{m_Q}(2\sigma \lambda_{k_1} k) W_{m_Q}(8\sigma \lambda_{k_1} \lambda_{k_2} \lambda_{p_2} k') \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где для сокращения записи введены дополнительные функции

$$\Upsilon_{\lambda_1, \lambda_2}^{\sigma, m_q}(k, k') = W_{m_q}(2\sigma \lambda_1 k) W_{m_q}(2\sigma \lambda_2 k') \quad (19)$$

и комбинация коэффициентов Клебша – Гордана группы вращений с полиномами Лежандра $P_L(\cos \beta)$

$$K_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}(\beta) = \sum_{S=0}^1 \sum_{L=|J-S|}^{J+S} \frac{(2L+1)}{(2J+1)} C_{\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2}}^{1/2 \ 1/2 \ S} C_{\lambda_{p_1} - \lambda_{p_2}}^{1/2 \ 1/2 \ S} C_{0 \ \lambda}^{L \ S \ J} C_{0 \ \lambda'}^{L \ S \ J} P_L(\cos \beta). \quad (20)$$

Таким образом, нам удастся разделить угловые переменные и переменные $k = |\mathbf{k}|, k' = |\mathbf{k}'|$. Аналогичную структуру имеют и другие компоненты межкваркового потенциала.

4. Межкварковый потенциал

С помощью соотношений (18) несложно найти ядро (7) в относительно общем виде. После вычисления спинорной части потенциала оставшая часть является функцией квадрата переданного импульса $\Phi(q^2)$. Так как квадрат переданного импульса можно привести к виду

$$q^2 = -2k k' (z - \cos \beta), \quad z = \frac{(\omega_{m_q}(k) \omega_{m_q}(k') - m_q^2)}{k k'} \geq 1, \quad (21)$$

то для окончательного вычисления потенциала (7) необходимо найти интегралы вида

$$\Phi_L(k, k') = \int_{-1}^1 d(\cos \beta) \Phi(q^2) P_L(\cos \beta), \quad (22)$$

которые определяют коэффициенты разложения функций $\Phi(q^2)$ по полиномам Лежандра.

Следуя вышеизложенной процедуре, получим, что релятивистский матричный элемент $V_{\lambda_1, \lambda_2'; \lambda_1, \lambda_2}^J(k', k)$ представляет сумму вида

$$\begin{aligned}
V_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}; \lambda_{k1}, \lambda_{k2}}^J(k', k) &= V_I^J(k', k) + \frac{\kappa_q \kappa_Q}{4m_q m_Q} V_{II}^J(k', k) - \\
&- \frac{\kappa_q (1 - \kappa_Q)}{2m_q} V_{III}^J(k', k) - \frac{\kappa_Q (1 + \kappa_q)}{2m_Q} V_{IV}^J(k', k) + V_S^J(k', k),
\end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
V_I^J(k', k) &= \frac{N_{k, k'}}{2\pi} \left[G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \tilde{\Phi}(k', k) \right) \right] \sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \times \\
&\times \delta_{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_Q}(k, k') + G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \tilde{\Phi}(k', k) \right) \times \\
&\times \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') W_{m_Q}(2\sigma \lambda_{k1} k) W_{m_Q}(8\sigma \lambda_{k1} \lambda_{k2} \lambda_{p2} k') \Big]
\end{aligned} \quad (24)$$

объединяет пертурбативную часть потенциала и часть векторной части запирающего потенциала (так как они имеют общую структуру). Остальные слагаемые определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
V_{II}^J(k', k) &= -\frac{N_{k, k'}}{4\pi} \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') \times \\
&\times \left\{ \left[k^2 + k'^2 + (\omega_{m_q}(k) + \omega_{m_q}(k'))(\omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_Q}(k')) \right] \times \right. \\
&\times \left. G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k, k') \right) + 2k k' G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; F^V(k, k') \right) \right\},
\end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned}
V_{III}^J(k', k) &= \frac{N_{k, k'}}{4\pi} \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \left\{ \sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') \times \right. \\
&\times \left(\frac{4}{3} k' \right) \left(\lambda_{p2} G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k, k') \right) - \lambda_{k2} G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \Phi^V(k', k) \right) \right) + \\
&+ 2\lambda_{k2} k' G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; F^V(k', k) \right) \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') + G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k', k) \right) \times \\
&\times \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') (2\sigma \lambda_{k2} k + \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_q}(k')) \Big\},
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
V_{IV}^J(k, k') &= -\frac{N_{k, k'}}{4\pi} \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') \left\{ \sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \times \right. \\
&\times \left(\frac{4}{3} k' \right) \left(\lambda_{p1} G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k, k') \right) - \lambda_{k1} G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k, k') \right) \right) + \\
&+ \sum_{\sigma=-1}^1 \left[\Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') (2\sigma \lambda_{k1} k + \omega_{m_Q}(k) + \omega_{m_Q}(k')) \right] G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^V(k, k') \right) + \\
&+ 2k' G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; F^V(k, k') \right) \sum_{\sigma=-1}^1 \sigma \Upsilon_{\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \Big\}.
\end{aligned} \quad (27)$$

Скалярная часть запирающего потенциала имеет вид

$$V_S^J(k, k') = -\frac{N_{k, k'}}{4\pi} G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \left(J, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \Phi^S(k, k') \right) \left(\sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k1}, \lambda_{p1}}^{\sigma, m_q}(k, k') \right) \left(\sum_{\sigma=-1}^1 \Upsilon_{-\lambda_{k2}, \lambda_{p2}}^{\sigma, m_Q}(k, k') \right). \quad (28)$$

В соотношениях (24) – (28) введены обозначения

$$G_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}^{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}}(J, s_1, s_2; \Phi(k', k)) = \sum_{S=|s_1-s_2|}^{s_1+s_2} \sum_{L=|J-S|}^{J+S} \frac{(2L+1)}{(2J+1)} C_{\lambda_{k1}}^{s_1} C_{-\lambda_{k2}}^{s_2} C_{\lambda_{p1}}^{s_1} C_{-\lambda_{p2}}^{s_2} C_{\lambda}^{S J} C_{0 \lambda}^{L S J} C_{\lambda'}^{L S J} \Phi_L(k', k). \quad (29)$$

Функции $\Phi_L(k', k)$ определены следующим образом:

$$\tilde{\Phi}_L(k', k) = \left(\frac{4}{3} \Phi_L^{\text{pert}}(k', k) + (1 + \kappa_q)(1 - \kappa_Q) \Phi_L^V(k', k) \right); \quad (30)$$

$$F_L^V(k', k) = \frac{1}{2L+1} \left((L+1) \Phi_{L+1}^V(k', k) + L \Phi_{L-1}^V(k', k) \right); \quad (31)$$

$$\Phi_L^{\text{pert}}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{\alpha_s(q^2)}{q^2} P_L(\cos \beta) d(\cos \beta); \quad (32)$$

$$\Phi_L^{V,S}(k', k) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 K_{V,S}(q^2) P_L(\cos \beta) d(\cos \beta). \quad (33)$$

Для вычисления межкваркового ядра в уравнении (5) необходимо воспользоваться соотношением (6). Соотношения (24) – (28) позволяют получить потенциал для синглетного или триплетного состояний системы кварк – антикварк с произвольным угловым моментом J , четностью $(-1)^{L+1}$ с произвольными массами m_q, m_Q . Так, например, для системы с кварками равной массы ($m_q = m_Q = m$) и $L = S = J = 0$ получим, что компоненты потенциала (6), аналогичные слагаемым в (23), записываются в виде

$$\begin{aligned} V_I^{J=0} &= \frac{(2\omega_m(k)\omega_m(k') - m^2) \tilde{\Phi}_0(k', k)}{\pi \omega_m(k)\omega_m(k')}, \\ V_{II}^{J=0} &= \frac{1}{2\pi \omega_m(k)\omega_m(k')} \left[2kk' (k^2 + k'^2) \Phi_1^V(k', k) + \frac{4}{3} k^2 k'^2 \Phi_2^V(k', k) + \right. \\ &\quad \left. + \Phi_0^V(k', k) \left(\frac{2}{3} k^2 k'^2 - k^2 - k'^2 - [\omega_m(k) + \omega_m(k')]^2 \right) \right], \\ V_{III}^{J=0} = -V_{IV}^{J=0} &= \frac{m}{2\pi \omega_m(k)\omega_m(k')} \left[k k' \Phi_1^V(k', k) + ([\omega_m(k) + \omega_m(k')]^2 + k^2 + k'^2) \Phi_0^V(k', k) \right], \\ V_S^{J=0} &= \frac{k k' \Phi_1^S(k', k) - (\omega_m(k)\omega_m(k') + m^2) \Phi_0^S(k', k)}{2\pi \omega_m(k)\omega_m(k')}. \end{aligned} \quad (34)$$

5. Параметры межкваркового потенциала

Чтобы получить ядро V^J (6) в явном виде, зададим вид функций $K_V(q^2)$ и $K_S(q^2)$, а также бегущей константы связи в КХД – $\alpha_s(q^2)$. Имеются весомые аргументы в пользу того, что потенциал записания описывается в нерелятивистском пределе центральным потенциалом вида $V(r) = \sigma r + w_0$ с некоторыми константами σ, w_0 . Чтобы воспроизвести этот потенциал в нерелятивистском пределе ($k^2, k'^2 \ll m_q^2, m_Q^2$) в нашем случае, положим, что

$$K_V(q^2) = (1 - \varepsilon) \left[-\frac{8\pi\sigma}{q^4} + (2\pi)^3 w_0 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right], \quad K_S(q^2) = \varepsilon \left[\frac{8\pi\sigma}{q^4} - (2\pi)^3 w_0 \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \right], \quad (35)$$

где ε – параметр смешивания векторного и скалярного записания.

Несложно найти, что слагаемое, пропорциональное $\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$, имеет вид

$$V_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}; \lambda_{k1}, \lambda_{k2}}^J(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{\delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \delta_{\lambda_{k1}, \lambda_{k2}} \delta_{\lambda_{p1}, \lambda_{p2}}}{k^2 \omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)} \times \left[(1 - \varepsilon) (k^2 + \omega_{m_q}(k) \omega_{m_Q}(k)) + \varepsilon m_q m_Q \right] w_0. \quad (36)$$

Функция (33) со слагаемыми, приводящими к линейному конфайменту, имеет вид

$$\Phi_{L,S}^{V,S}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{A_{V,S} Q_L(y)}{k^2 k'^2} \quad (37)$$

с производными от полиномов Лежандра второго рода $Q_L(y)$ и $y = (k^2 + k'^2)/(2kk')$.

6. Бегущая константа КХД

Расчет пертурбативной части требует вычисления $\Phi_L^{\text{pert}}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, куда входит бегущая константа α_s . Поведение бегущей константы связи $\alpha_s(Q^2)$, $Q^2 = -q^2$, которое следует из решения ренорм-групповых уравнений КХД, описывается достаточно громоздким соотношением и не позволяет получить какое-либо аналитическое соотношение для функции $\Phi_L^{\text{pert}}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Поэтому мы используем рецепт работы [12], где предложена удобная для расчетов параметризация бегущей константы связи $\alpha_s(Q^2)$ в виде

$$\alpha_s(Q^2) = \sum_{k=1}^3 a_k \exp[-Q^2/(4\gamma_k^2)]. \quad (38)$$

Подгоняя значения константы сильного взаимодействия уравнением (38), получим, что

$$a_1 = 0,43209 \pm 0,03256, \quad a_2 = 0,13089 \pm 0,00396, \quad a_3 = 0,11657 \pm 0,00794,$$

$$\gamma_1 = (0,651411 \pm 0,03414) \text{ ГэВ}; \quad \gamma_2 = (187,13991 \pm 22,02833) \text{ ГэВ},$$

$$\gamma_3 = (5,45638 \pm 0,5204) \text{ ГэВ}. \quad (39)$$

Отметим, что параметризация (38) с коэффициентами (39) хорошо воспроизводит как экспериментальные значения бегущей константы сильного взаимодействия, так и поведение $\alpha_s(Q^2)$, которое следует из КХД.

Подставляя (21) и (38) в функцию (32), найдем, что

$$\Phi_0^{\text{pert}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \frac{1}{2k k'} \sum_{i=1}^3 a_i \left[Ei(-c_i(z-1)) - Ei(-c_i(z+1)) \right], \quad (40)$$

где $c_i = k' k / (2\gamma_i^2)$, а $Ei(z)$ – интегральная показательная функция. Несложно найти функции и для более высоких L .

На рис. 1 представлен график ядра для системы с $m_Q = m_q = m = 0,2 \text{ ГэВ}$ и $J = L = S = 0$, рассчитанного с помощью соотношений (34). В этом случае мы положили коэффициент смешивания $\varepsilon = -1$, хромодинамический момент кварка $\kappa_q = -1$ и коэффициент $\sigma = 0,18 \text{ ГэВ}^2$ (в струнных моделях мезонов этот коэффициент соответствует натяжению глюонной струны).

«Впадина» на графике соответствует значению $k = k'$, при котором ядро имеет сингулярность. Это характерно для большинства потенциалов в импульсном пространстве (кулоновский потенциал, линейный

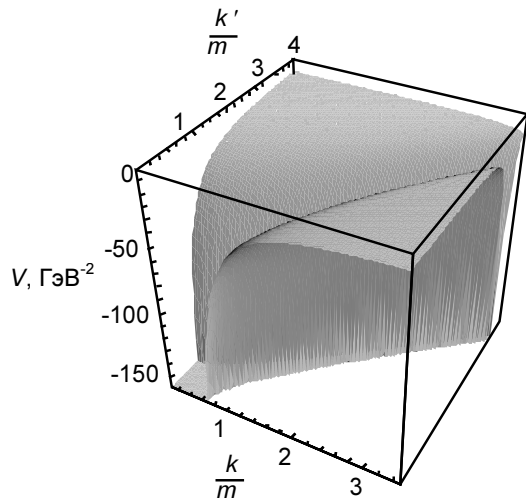


Рис. 1. Поведение КХД-мотивированного ядра для системы кварк – антикварк

запирающий и т.д.). В следующей работе мы детально рассмотрим метод решения радиального интегрального уравнения (5) в таких ситуациях.

Таким образом, с помощью соотношений (36), (37) и (40) мы имеем возможность найти ядро интегрального уравнения релятивистской системы кварк – антикварк.

Заключение

В работе построено КХД-мотивированное ядро релятивистской кварк-антикварковой системы для произвольного момента количества движения J с учетом возможного смешивания скалярной и векторной запирающей части потенциала. Ядро рассчитано путем точного вычисления амплитуды одноглюонного обмена и лоренц-структуры запирающей части межкваркового потенциала с учетом аномального хромодинамического момента кварков. В итоге решение спектральной задачи сводится к решению одномерного интегрального уравнения, что существенно упрощает дальнейшее численное решение. В частном случае построено ядро для синглетного состояния с кварками равной массы и $J = 0$. Предложенная методика вычислений может быть использована для релятивистских систем с различными взаимодействиями (электромагнитное, сильное).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bethe H.A. and Salpeter E.E. // Phys. Rev. – 1951. – V. 84. – P. 1232–1242.
2. Salpeter E.E. // Phys. Rev. – 1952. – V. 87. – P. 328–342.
3. Logunov A.A. and Tavkhelidze A.N. // Nuovo Cim. – 1963. – V. 29. – P. 380–399.
4. Kadyshevsky V.G. // Nucl. Phys. – 1968. – V. B6. – P. 125–148.
5. Todorov I.T. // Phys. Rev. – 1971. – V. D3. – P. 2351–2356.
6. Gross F. // Phys. Rev. – 1969. – V. 186. – P. 1448–1462.
7. Keister B.D. and Polyzou W.N. // Advances in Nuclear Physics. – 1991. – V. 20. – P. 225–479.
8. Eichten E., Kinoshita T., Gottfried K., et al. // Phys. Rev. Lett. – 1975. – V. 34. – P. 369–372.
9. Ebert D., Faustov R.N., and Galkin V.O. // e-Print Archive: hep-ph/9809285. – 1998.
10. Lucha W., Rupprecht H., and Schöberl F. // Phys. Rev. – 1991. – V. D44. – P. 242–249.
11. Андреев В.В. // ЯФ. – 2003. – Т. 66. – № 2. – С. 410–420.
12. Godfrey S. and Isgur N. // Phys. Rev. – 1985. – V. D32. – P. 189–231.

Гомельский госуниверситет им. Ф. Скорины
E-mail: andreev@gsu.unibel.by

Поступила в редакцию 20.04.06.