Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 517.946.9 *МАТЕМАТИКА*

В. Н. ТУЛОВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 3 III 1972)

Мы будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ \alpha_j = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$D^\alpha = (D_1)^{\alpha_1} \times \ldots \times (D_n)^{\alpha_n}, \quad D_j = -i\partial/\partial x_j.$$

Если $X \subseteq R^n$ — измеримое по Лебегу множество, то его меру будем обозначать $\mu_n(X)$. $L_2(X)$ — гильбертово пространство функций на X со скалярным произведением

$$(f, g) = \int\limits_X f(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx.$$

Двойственное к R^n пространство будем обозначать $R^{n'}$, его элементы — буквой ξ.

Пусть $G \subseteq R^n$ — ограниченное открытое множество; $P(x, D)$ — формально самосопряженный оператор с гладкими коэффициентами такой, что для любых $x, y \in \overline{G}$ полиномы $P(x, \xi)$, $P(y, \xi)$ гипоэллиптичны и имеют одинаковую силу. Пусть P_0 — оператор $P(x, D)$, рассматриваемый на функциях из $C_0^\infty(G)$; P_0 — симметрический оператор и из неравенства Гординга следует, что он ограничен снизу (см. ([1])), т. е.

$$(P(x, D)\varphi, \varphi) \geqslant C\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Пусть $\widetilde{P}$ — расширение по Фридрихсу оператора P_0. В работе изучается асимптотическое поведение при $t \to +\infty$ функции $N_G(t)$, равной числу собственных значений оператора $\widetilde{P}$, меньших t. Для эллиптических уравнений эта задача хорошо исследована и имеется много работ на эту тему. Мы укажем только работы С. Агмона ([2]), где эта задача решена для любого ограниченного снизу расширения оператора P_0, удовлетворяющего некоторым дополнительным условиям, и на работу М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка ([3]), где основные усилия направлены на то, чтобы получить аналогичный результат при минимальных требованиях на область G и на коэффициенты оператора $P(x, D)$.

В данной работе асимптотика $N_G(t)$ находится вариационным методом. Новым является то, что нам не требуется рассматривать задачу Неймана для нахождения асимптотики $N_G(t)$. Вариационный принцип Куранта используется в следующей формулировке, принадлежащей И. М. Глазману (см. ([4])).

Лемма. *Пусть A — ограниченный снизу самосопряженный оператор. Число собственных значений оператора A, меньших t, равно максимальной размерности линейных подпространств $D \subseteq D(A)$ таких, что*

$$(Au, u) < t(u, u), \quad u \in D, \quad u \neq 0. \tag{1}$$

Перед формулировкой основной теоремы введем обозначения:

$$V_P(x,\ t) = \mu_n\{\xi \in R^{n'};\ \operatorname{Re} P(x,\ \xi) \leqslant t\},$$
$$V_P(t) = \mu_{2n}\{(x,\ \xi) \in G \times R^{n'};\ \operatorname{Re} P(x,\ \xi) \leqslant t\}.$$

Теорема. *Если $G \subseteq R^n$ — ограниченное открытое множество такое, что $\mu_n(\partial G) = 0$, где ∂G — граница G, а $\widetilde{P}$ — описанное выше самосопряженное расширение оператора $P(x,\ D)$, то функция $N_G(t)$ имеет асимптотику*

$$N_G(t) = (2\pi)^{-n} V_P(t)\,(1 + o(1)). \tag{2}$$

Наметим доказательство теоремы. Возьмем конечное число открытых множеств $G_1, \ldots, G_N$ так, что

$$G_i \cap G_j = \phi \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad G_i \subseteq G;$$
$$\sum_{i=1}^{N} \mu_n(G_i) = \mu_n(G), \quad \mu_n(\partial G_i) = 0;$$
$$|x - y| \leqslant \delta, \quad x,\ y \in G_i, \quad i = 1, \ldots, N.$$

В каждом множестве G_i выберем точку x_i. Пусть

$$Q(x,\ \xi) = \operatorname{Re} P(x,\ \xi).$$

Для функций $\varphi(x) \in C_0^\infty(G_i)$ легко доказать оценку

$$|(P(x,\ D)\varphi,\ \varphi) - (Q(x_i,\ D)\varphi,\ \varphi)| \leqslant C\delta(Q(x_i,\ D)\varphi,\ \varphi) + C(\delta)\|\varphi\|^2,$$

где C не зависит от i, δ. Отсюда имеем

$$(P(x,\ D)\varphi,\ \varphi) \leqslant (1 + C\delta)\,(Q(x_i,\ D)\varphi,\ \varphi) + C(\delta)\|\varphi\|^2. \tag{3}$$

Возьмем число $\tau = (t - C(\delta))/(1 + C\delta)$ и построим в $C_0^\infty(G_i)$ линейное подпространство D_i такое, что

$$(Q(x_i,\ D)\varphi,\ \varphi) < \tau\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in D_i, \quad \varphi \neq 0.$$

В работе ([5]) описано построение D_i и доказано, что

$$\dim D_i = (2\pi)^{-n}\mu_n(G_i)\,V_p(x_i,\ \tau) + o(V_p(x_j,\ \tau)).$$

Пусть D — линейная оболочка всех D_i. Тогда из (3) следует, что

$$(P(x,\ D)\varphi,\ \varphi) < t\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in D, \quad \varphi \neq 0.$$

Отсюда и из леммы следует, что

$$N_G(t) \geqslant \dim D = \sum_{i=1}^{N} (2\pi)^{-n}\{\mu_n(G_i)V_p(x_i\tau) + o(V_p(x_i,\tau))\}.$$

Разделим обе части этого неравенства на $V_P(t)$ и перейдем к пределу. Получим

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{N_G(t)}{V_P(t)} \geqslant (2\pi)^{-n}(1 - C_1\delta)$$

и, переходя к пределу при $\delta \to 0$,

$$\liminf_{t \to +\infty} \frac{N_G(t)}{V_P(t)} \geqslant (2\pi \tag{3'}$$

Теперь оценим $N_G(t)$ сверху.

Пусть $U_1, \ldots, U_N$ — открытое покрытие множества $\overline{G}$, причем для $x, y \in U_j$ имеем $|x-y| \leqslant \delta$.

Пусть $\psi_j(x) \in C_0^\infty(U_j)$ и

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j^2(x) = 1, \quad x \in \overline{G}.$$

Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$(P(x, D)\varphi, \varphi) \geqslant$$
$$\geqslant (1-\varepsilon)(1-C\delta) \sum_{j=1}^{N} \{(Q(x_j, D)(\varphi\psi_j), \varphi\psi_j) - C(\varepsilon, \delta) \|\varphi\psi_j\|^2\}, \tag{4}$$

где $x_j \in U_j$, $\varphi \in C_0^\infty(G)$, C не зависит от ε, δ.

Пусть $D \subseteq C_0^\infty(G)$ — линейное подпространство, на котором выполнена оценка

$$(P(x, D)\varphi, \varphi) < t(\varphi, \varphi), \quad \varphi \in D, \quad \varphi \neq 0. \tag{5}$$

Положим $\tau = [t + (1-\varepsilon)(1-C\delta) \cdot C(\varepsilon, \delta)] / (1-\varepsilon)(1-C\delta)$.

В работе ([5]) доказано, что размерность подпространства $D_j \subseteq C_0^\infty(U_j)$, на котором выполнена оценка

$$(Q(x_j, D)\varphi, \varphi) < \tau\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in D_j, \quad \varphi \neq 0, \tag{6}$$

не превосходит величины $(2\pi)^{-n}\mu_n(U_j) V_P(x_j, \tau)(1 + o(1))$.

Рассмотрим отображение $\varphi \to \varphi\psi_j$ пространства D в $C_0^\infty(U_j)$. Пусть H_j — образ D при этом отображении. Тогда в H_j существует подпространство L_j такое, что $\dim L_j \geqslant \dim H_j - (2\pi)^{-n}\mu_n(U_j) V_P(x_j, \tau)(1 + o(1))$ и на L_j выполнено неравенство

$$(Q(x_j, D)\varphi, \varphi) \geqslant \tau\|\varphi\|^2, \quad \varphi \in L_j. \tag{7}$$

Если бы выполнялось неравенство

$$\dim D > \sum_{j=1}^{N} (2\pi)^{-n}\mu_n(U_j) V_P(x_j, \tau)(1 + o(1)),$$

то в D существовала бы функция $\varphi_0 \neq 0$ такая, что для всех $1 \leqslant j \leqslant N$, $\varphi_0\psi_j \in L_j$. Тогда для $\varphi_0\psi_j$ выполнялось бы для всех j неравенство (7). Суммируя эти неравенства по j, мы получили бы неравенство

$$(P(x, D)\varphi_0, \varphi_0) \geqslant t\|\varphi_0\|^2,$$

что противоречит неравенству (5). Поэтому

$$\dim D \leqslant \sum_{j=1}^{N} (2\pi)^{-n}\mu_n(U_j) V_P(x_j, \tau)(1 + o(1)).$$

Из леммы следует, что

$$N_G(t) \leqslant (2\pi)^{-n} \sum_{j=1}^{N} \mu_n(U_j) V_P(x_j, \tau)(1 + o(1)).$$

Деля это неравенство на $V_P(t)$ и переходя к пределу при $t \to +\infty$, получим

$$\limsup_{t \to +\infty} \frac{N_G(t)}{V_P(t)} \leqslant (2\pi)^{-n}(1 + C\varepsilon); \tag{8}$$

при этом надо выбрать покрытие $\{U_j\}$ таким образом, чтобы было

$$\mu_n(\bigcup_j U_j \setminus G) \leqslant \varepsilon,$$

что возможно в силу условия $\mu_n(\partial G)=0$, и чтобы мера того множества точек x, которые принадлежат по крайней мере двум множествам U_j, не превосходила ε.

Переходя в (8) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим неравенство

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{N_G(t)}{V_P(t)} \leqslant (2\pi)^{-n}.$$

Из этого неравенства и из неравенства (3′) получаем утверждение теоремы.

Автор выражает благодарность проф. Б. М. Левитану за постановку задачи и проф. В. Б. Лидскому за внимание к работе.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Go-Kumano, J. Math. Soc. Japan, 21, 413 (1969). [2] S. Agmon, Arch. Rat. Mech. and Anal., 28, № 3, 165 (1969). [3] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Функц. анализ, в. 4, 1 (1970). [4] И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, 1963. [5] В. Н. Туловский, Функц. анализ, в. 3, 85 (1971).