Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 3

УДК 517.51:519.5 *МАТЕМАТИКА*

А. И. СТЕПАНЕЦ

ОТКЛОНЕНИЕ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ НА КЛАССАХ ФУНКЦИЙ ГЁЛЬДЕРА ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 6 III 1972)

Одной из наиболее важных задач в теории рядов Фурье и в теории приближения функций в целом является задача А. Н. Колмогорова об отыскании асимптотических равенств для точных верхних граней отклонений тригонометрических полиномов $U_n(f;\ t)$, порождаемых различными линейными процессами U_n суммирования рядов Фурье, от функций $f(t)$ некоторых компактных классов $\mathfrak{M}$, т. е. задача об отыскании асимптотических равенств для величины

$$\mathscr{E}(U_n;\ \mathfrak{M}) = \sup_{f\in\mathfrak{M}} \|f(t) - U_n(f;\ t)\|_C.$$

В случае, когда $U_n(f;\ t)$ совпадает с частными суммами Фурье, а $\mathfrak{M}$ — с классом 2π-периодических r раз дифференцируемых функций $f(t)$, у которых почти всюду $|f^{(r)}(t)| \leqslant 1$, эта задача, как известно, была впервые поставлена и решена А. Н. Колмогоровым ([1]). Позже результат А. Н. Колмогорова развивался в различных направлениях: обобщались классы функций и вместо частных сумм Фурье брались их различные средние.

В настоящее время благодаря работам целого ряда авторов задача А. Н. Колмогорова полностью решена для наиболее важных классов функций и наиболее известных методов суммирования рядов Фурье.

В то время как в случае функций одной переменной эта задача получила должное внимание, в случае функций двух переменных связанные с ней вопросы почти все остаются открытыми. В этом направлении нам известны лишь единичные результаты, относящиеся к методу Фурье, берущие свое начало в работе П. Т. Бугайца ([2]). В отдельных случаях (например, когда $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\omega_2(z) = z^\beta$, $0 < \alpha,\ \beta \leqslant 1$ и $1/n^\alpha = O(1/m^\beta)$) теорема, доказанная П. Т. Бугайцом, является решением задачи А. Н. Колмогорова.

Однако даже в простейшем случае, когда, например $n = m$ и $\omega_1(t) = t^\alpha$, $\omega_2(z) = z^{2\alpha}$, $0 < \alpha \leqslant 1/2$, как нетрудно убедиться, решения задачи А. Н. Колмогорова эта теорема не дает.

Более того, учитывая, что числа n и m, вообще говоря, могут возрастать произвольным образом и замечая, что в показатель порядка величины остатка ρ_{nm}, полученного П. Т. Бугайцом, входят слагаемые $\ln n\omega_2\left(\frac{2\pi}{2m+1}\right)$ и $\ln m\omega_1\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)$, нетрудно найти такие последовательности чисел n и m, чтобы величина ρ_{nm} была неограниченной. В силу этого возникает вопрос о получении новых результатов в этом направлении, дающих решение задачи А. Н. Колмогорова при произвольном возрастании чисел n и m.

Нами доказано следующее утверждение.

Теорема. *При произвольном возрастании чисел n и m имеет место асимптотическое равенство*

$$\mathscr{E}(S_{nm};\ H_{A,B}^{\alpha,\beta}) = \sup_{f\in H_{A,B}^{\alpha,\beta}} \|f(x,y)-S_{nm}(f;x,y)\|_C = \frac{8}{\pi^4}\ln(2n+1)\ln(2m+1)\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\min\left\{A\left(\frac{4t}{2n+1}\right)^\alpha;\ B\left(\frac{4z}{2m+1}\right)^\beta\right\}\sin t\sin z\,dt\,dz+$$

$$+\frac{A\cdot 2^{2\alpha+1}\ln(2n+1)}{\pi^2(2n+1)^\alpha}\int_0^{\pi/2}t^\alpha\sin t\,dt+\frac{B\cdot 2^{2\beta+1}\ln(2m+1)}{\pi^2(2m+1)^\beta}\int_0^{\pi/2}z^\beta\sin z\,dz+$$

$$+O\left[\min\left\{\frac{1}{n^\alpha};\frac{1}{m^\beta}\right\}\ln nm+\frac{1}{n^\alpha}+\frac{1}{m^\beta}\right],$$

где $H_{A,B}^{\alpha,\beta}$ — класс 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$|f(x,y)-f(x_1,y_1)|\leqslant A|x-x_1|^\alpha+B|y-y_1|^\beta,$$

A и B — фиксированные постоянные, $0<\alpha,\beta\leqslant 1$, $S_{nm}(f;x,y)$ — частная сумма порядка nm ряда Фурье функции $f(x,y)$.

Легко видеть, что эта теорема дает полное решение соответствующей задачи А. Н. Колмогорова.

Отметим, что метод, примененный нами для доказательства сформулированной теоремы, является дальнейшим развитием метода, предложенного В. К. Дзядыком в ([3]), который существенным образом опирается на одну известную лемму Н. П. Корнейчука ([4]).

Вначале мы распространяем лемму Н. П. Корнейчука на случай двух переменных:

Лемма. *Пусть суммируемые функции $\psi(x)$ и $\varphi(y)$, заданные соответственно на отрезках $[a,b]$ и $[a_1,b_1]$, обладают такими свойствами:*

1) $\psi(x)>0$ ($\psi(x)<0$) *почти всюду на* $[a,c]$ *и* $\psi(x)<0$ ($\psi(x)>0$) *почти всюду на* $[c,b]$, $a<c<b$;

$\varphi(y)>0$ ($\varphi(y)<0$) *почти всюду на* $[a_1,c_1]$ *и* $\varphi(y)<0$ ($\varphi(y)>0$) *почти всюду на* $[c_1,b_1]$, $a_1<c_1<b_1$.

2) $\int_a^b\psi(x)\,dx=0,\ \int_{a_1}^{b_1}\varphi(y)\,dy=0.$

Тогда

$$\sup_{f\in H_{A,B}^{\alpha,\beta}}\left|\int_a^b\int_{a_1}^{b_1}\psi(x)\varphi(y)f(x,y)\,dx\,dy\right|=$$

$$=2\left|\int_a^c\int_{a_1}^{c_1}\psi(x)\varphi(y)\min\{A(\rho(t)-t)^\alpha;\ B(\delta(z)-z)^\beta\}\,dx\,dy\right|,$$

где $\rho(x)$ и $\delta(y)$ — функции, определяемые равенствами

$$\int_a^x\psi(t)\,dt=\int_a^{\rho(x)}\psi(t)\,dt,\quad x\in[a,c],\quad \rho(x)\in[c,b],$$

$$\int_{a_1}^y\varphi(z)\,dz=\int_{a_1}^{\delta(y)}\varphi(z)\,dz,\quad y\in[a_1,c_1],\quad \delta(y)\in[c_1,b_1],$$

$H^{\alpha,\beta}_{A,B}$ — *класс функций* $f(x, y)$, *удовлетворяющих в прямоугольнике* $p = [a \leqslant x \leqslant b, a_1 \leqslant y \leqslant b_1]$ *условию Липшица*:

$$|f(x, y) - f(x_1, y_1)| \leqslant A|x - x_1|^\alpha + B|y - y_1|^\beta,$$

A и B — произвольные фиксированные положительные постоянные.

Следует отметить, что указанная в лемме верхняя грань достигается для вполне определенной функции $f(x, y)$ из класса $H^{\alpha,\beta}_{A,B}$, построение которой мы здесь воспроизвести не можем из-за его относительной громоздкости.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность В. К. Дзядыку за постановку задачи, за внимание и поддержку при выполнении этой работы.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
21 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogoroff, Ann. Math., 36, № 2, 521 (1935). [2] В. К. Дзядык, ДАН, 79, № 4, 557 (1951). [3] В. К. Дзядык, В. Т. Гаврилюк, А. И. Степанец, Докл. УССР, сер. А, № 3, 203 (1969). [4] Н. П. Корнейчук, ДАН, 125, № 2, 258 (1959).