

УДК 517.53:517.947.42

МАТЕМАТИКА

А. В. СЫЧЕВ

ОБ ОДНОМ КВАЗИКОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ШАРА НА СЕБЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 21 II 1972)

В настоящей заметке рассматривается одно квазиконформное отображение с осевой симметрией единичного шара на себя, с помощью которого изучается искажение в классе всевозможных квазиконформных отображений $y = f(x)$, $f(0) = 0$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ единичного шара на себя и устанавливается соотношение между модулями плоской и пространственной кольцевых областей Греча.

Пусть $w = \varphi(z)$, $z = x_1 + ix_2$, $w = y_1 + iy_2$ — экстремальное q -квазиконформное отображение Греча, т. е. отображение, дающее максимум величине $\rho = |f(z)|$ при фиксированном z , $|z| = r$, в классе всех q -квазиконформных отображений $w = f(z)$, $f(0) = 0$, круга $|z| < 1$ на себя.

Обозначим через $z_3 = \varphi_r(z)$ конформное отображение, представимое в виде цепочки элементарных отображений

$$z_1 = \frac{z - r_1}{1 - \bar{z}r_1}, \quad r = \frac{1}{2(r_1 + 1/r_1)}; \quad z_2 = -\frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right); \quad z_3 = \operatorname{sn}^{-1}(z_2, r)$$

полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$, на прямоугольник Π_r , при котором точки $-1, 0, r, 1$ переходят соответственно в вершины Π_r : $-K(r) + iK'(r)$, $-K(r)$, $K(r)$, $K(r) + iK'(r)$. Здесь $K(r)$ и $K'(r)$ — полные эллиптические интегралы первого рода от $k = r$ и $k' = \sqrt{1 - r^2}$. Точно так же через $w_3 = \varphi_\rho(w)$ обозначим конформное отображение полукруга $|w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$, на прямоугольник Π_ρ , при котором точки $-1, 0, \rho, 1$ переходят соответственно в вершины Π_ρ : $-K(\rho) + iK'(\rho)$, $-K(\rho)$, $K(\rho)$, $K(\rho) + iK'(\rho)$. Пусть далее $w_3 = \psi(z_3) = \frac{K(\rho)}{K(r)}x_3 + i\frac{K'(\rho)}{K'(r)}y_3$ — аффинное отображение прямоугольника Π_r на прямоугольник Π_ρ .

Тогда экстремальное q -квазиконформное отображение Греча представляется в виде

$$w = \varphi(z) = \varphi_\rho^{-1} \cdot \psi \cdot \varphi_r(z), \quad (1)$$

причем, как показано П. П. Белинским ⁽¹⁾, ρ определяется из соотношения

$$\frac{K'(\rho)}{K(\rho)} = \frac{1}{q} \frac{K'(r)}{K(r)}. \quad (2)$$

Введем отображение шара $|x| < 1$ на себя:

$$y = \Phi(x): y_1 + it = \varphi(x_1 + is), \quad a = \beta,$$

где (s, α, x_1) , (t, β, y_1) — цилиндрические координаты в пространствах x и y соответственно.

Отображение Φ будем называть вращением экстремального q -квазиконформного отображения Греча φ .

Тогда имеет место

Теорема 1. Вращение Φ экстремального q -квазиконформного отображения Греча φ также является q -квазиконформным отображением.

Приведем схему доказательства. Так как производная Φ , порождаемая вращением φ , равна $\operatorname{Im} w / \operatorname{Im} z$, $|dz_1/dz| = \operatorname{Im} z_1 / \operatorname{Im} z$, $|dw_1/dw| = \operatorname{Im} w_1 / \operatorname{Im} w$ и отображение $w_1 = \varphi_1(z_1)$ симметрично относительно осей координат, то для доказательства теоремы достаточно доказать справедливость двойного неравенства

$$\min \left| \frac{dw_1}{dz_1} \right| \leq \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} z_1} \leq \max \left| \frac{dw_1}{dz_1} \right| \quad (3)$$

в каждой точке z_1 квадранта K : $\{|z_1| < 1, \operatorname{Re} z_1 > 0, \operatorname{Im} z_1 > 0\}$.

Подставляя в неравенство (3) из (1) и (2) значение q и $w_1 = \varphi_1(z_1)$ в явном виде, преобразуем его к виду

$$\frac{K'(\rho)}{K'(r)} \leq \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} z_1} \left| \frac{z_1}{w_1} \right| \sqrt{\frac{\left| 1 - \frac{r^2}{4} \left(z_1 + \frac{1}{z_1} \right)^2 \right|}{\left| 1 - \frac{\rho^2}{4} \left(w_1 + \frac{1}{w_1} \right)^2 \right|}} \leq \frac{K(\rho)}{K(r)}. \quad (4)$$

Справедливость неравенства (4) в K следует из того, что наименьшее и наибольшее значения оцениваемой функции достигаются на отрезке $[0, 1]$, в точках которого справедливость (4) очевидна.

Введем обозначения

$$\rho_{2,q} = \max_f |f(z)|, \quad \rho_{n,q} = \max_f |f(x)|,$$

$|z|=r$ $|x|=r$

где максимум берется над классом всевозможных q -квазиконформных отображений f , $f(0) = 0$, круга $|z| < 1$ (соответственно n -мерного, $n \geq 3$, шара $|x| < 1$) на себя. Поскольку для $\rho_{2,q}$ экстремальным является q -квазиконформное отображение Грёча, то величина $\rho_{2,q}$ определяется из соотношения (2).

Из теоремы 1 немедленно получаем

Следствие 1. $\rho_{3,q} \geq \rho_{2,q}$.

Так как имеются все основания предполагать, что экстремальное отображение для $\rho_{3,q}$ обладает особой симметрией, то с тем же основанием можно сформулировать гипотезу, что $\rho_{3,q} = \rho_{2,q}$ и, следовательно, что экстремальным для $\rho_{3,q}$ является отображение Φ . Более того, есть основания предполагать, что $\rho_{n,q} = \rho_{2,q}$.

Обозначим далее через G и D_r плоскую и пространственную кольцевые области Грёча, т. е. области, полученные из круга $|z| < 1$ (шара $|x| < 1$) выбрасыванием отрезка $[0, r]$, через $\operatorname{mod}_2 G_r$ и $\operatorname{mod}_3 D_r$ — 2-модуль G_r и 3-модуль D_r соответственно. Известно, что

$$\operatorname{mod}_2 G_r = \frac{\pi}{4} \frac{K'(r)}{K(r)}. \quad (5)$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Функция $\Psi(r) = \operatorname{mod}_3 D_r / \operatorname{mod}_2 G_r$ в интервале $0 < r < 1$ монотонно возрастающая, причем $\lim_{r \rightarrow 0} \Psi(r) = 2$, $\lim_{r \rightarrow 1} \left[\ln \frac{1}{1-r^2} \right]^{-1/2} \Psi(r) = \mu$

где $\mu = 4\pi^{-2}c$, c — некоторая абсолютная постоянная, $1, 03... \leq c \leq 2,62...$

Доказательство. Вначале докажем, что функция $\Psi(r)$ является монотонно возрастающей. Пусть $r_1 < r_2$ и φ — экстремальное отображение Грёча G_{r_1} на G_{r_2} . Ввиду (2), с учетом (5), отображение φ является q -квазиконформным с

$$q = \frac{K'(r_1)}{K(r_1)} \frac{K(r_2)}{K(r_2)} = \frac{\operatorname{mod}_2 G_{r_1}}{\operatorname{mod}_2 G_{r_2}}. \quad (6)$$

Но в силу теоремы 1 отображение Φ (вращение отображения φ) D_{r_1} на D_{r_2} также является q -квазиконформным и, следовательно, по определению квазиконформного отображения,

$$\text{mod}_3 D_{r_1} / \text{mod}_3 D_{r_2} \leq q. \quad (7)$$

Теперь соединение (6) и (7) доказывает монотонное возрастание функции $\Psi(r)$.

Рассматривая асимптотическое поведение $K'(r)/K(r)$ при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow 1$ и используя (5) и теоремы 10 и 12 ⁽²⁾, получаем искомые предельные соотношения.

С л е д с т в и е 2. $\text{mod}_3 D_r \geq 2 \text{mod}_2 G_r$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. П. Белинский, ДАН, 91, № 5, 997 (1953). ² G. D. Anderson, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, 438 (1969).