

Я. Л. ШАПИРО

О ПРИВОДИМЫХ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ДВУЛИСТНЫХ СТРУКТУРАХ НА НИХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1972)

Объектом исследования являются полные приводимые римановы пространства V^n с двулистной структурой, составленной из максимальных интегральных многообразий (листов) двух дополнительных (по ортогональности) распределений (или полей) абсолютного параллелизма. В случае односвязного V^n все вопросы решаются теоремой де Рама ⁽¹⁾, согласно которой такое V^n изометрично риманову произведению двух римановых пространств. Для изложения результатов, относящихся к общему (многосвязному) случаю, понадобятся некоторые термины и обозначения.

Группу Ψ преобразований топологического пространства X будем называть свободно действующей ⁽²⁾, (стр. 224), если для каждой точки $p \in X^n$ и любого (отличного от id тождественного) преобразования $f \in \Psi$ найдется такая окрестность $U(p)$, что $U(p) \cap fU(p) = \emptyset$. Пусть, далее, V_i , $i = 1, 2$, — риманово пространство и Ψ_i — группа его изометрий (на себя). Кроме того, задан изоморфизм $\theta: \Psi_1 \rightarrow \Psi_2$ на Ψ_2 . Тогда на римановом $V_1 \times V_2$ определена группа изометрии (на себя), элементы которой (обозначаемые через $\psi_1 \circ \theta\psi_1$) задаются формулой

$$(\psi_1 \circ \theta\psi_1)(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\psi_1 v_1, (\theta\psi_1) v_2),$$

в которой $v_i \in V_i$ и $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$.

Группу эту будем обозначать $\Psi_1 + \Psi_2$.

Предположим, что на римановом V^n свободно действует группа его изометрий Ψ . Тогда существует риманово фактор-пространство V^n/Ψ , элементами которого являются орбиты точек $v \in V^n$ по группе Ψ и для которого естественное отображение $\Psi: V^n \rightarrow V^n/\Psi$ является локальной изометрией ⁽²⁾, (стр. 224).

Пусть V^n — полное приводимое риманово пространство и $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ — два дополнительных друг для друга (по ортогональности) поля или распределения (размерностей $v > 0$ и $n - v > 0$) абсолютного параллелизма. Двулистную структуру, составленную из (двух семейств) максимальных интегральных многообразий (листов) этих распределений будем обозначать через St_2 (или St_2^v). Пусть, кроме того, даны римановы пространства V_i , $i = 1, 2$, и изоморфные группы Ψ_i изометрии этих пространств (на себя), причем группа изометрий $\Psi_1 + \Psi_2 (= \Psi)$ действует (на $V_1 \times V_2$, разумеется) свободно. Если существует изоморфизм $\Xi: V^n \rightarrow V_1 \times V_2/\Psi$, который преобразует St_2 на V^n в двулистную структуру (на $V_1 \times V_2/\Psi$), которая является образом естественной двулистной структуры произведения $(V_1 \times V_2)$ при естественном отображении $V_1 \times V_2 \rightarrow V_1 \times V_2/\Psi^*$, то Ξ назовем представлением пары (V^n, St_2) .

Теорема 1. Пусть дана пара (V^n, St_2) .

Тогда 1) На листах $\mathcal{U}_i(p)$, $i = 1, 2$, из (различных семейств) St_2 , проходящих через почти (т. е. за исключением множества меры нуль) каж-

* Ввиду инвариантности естественной двулистной структуры произведения $(V_1 \times V_2)$ относительно Ψ упомянутый образ однозначно определен.

дую точку $p \in V^n$, определены — соответственно — изоморфные группы их изометрий Ψ_{ip} на себя таким образом, что группа изометрий $\Psi_{ip} + \Psi_{ip}^{-1} (= \Psi_p)$ на $V_1 \times V_2$ действует свободно и существует представление $\Xi: V^n \rightarrow V_1 \times V_2 / \Psi_p$ упомянутой пары; 2) фундаментальная группа G многообразия V^n содержит нормальные делители G_{ii}^0 , $i = 1, 2$, изоморфные фундаментальным группам многообразий V_i , причем группа Ψ_p (а также Ψ_{ip}) изоморфна фактор-группе $G / G_{11}^0 \times G_{22}^0$.

Примером может служить лист Мёбиуса, прямолинейные образующие которого и ортогональные им траектории образуют St_2 . На каждой прямолинейной образующей V_1 определена группа 2-го порядка изометрий, единственным нетривиальным элементом которой является симметрия относительно точки пересечения V_1 с «горловой» траекторией V_{20} (длины a). На всякой другой траектории V_2 (длины $2a$) также определена группа 2-го порядка изометрий, единственный нетривиальный элемент которой — изометрия, ставящая в соответствие каждой точке $p \in V_2$ ее «диаметрально противоположную» точку (на дуговом расстоянии a). Аналогичная ситуация имеет место и на (локально эвклидовой) бутылке Клейна.

В случае односвязности V^n , очевидно, $\Psi = \text{id}$ и теорема 1 переходит в упомянутую выше теорему (1).

Теорема 2. Представление $\Xi: V^n \rightarrow V_1 \times V_2 / \Psi_1 + \Psi_2$ пары (V^n, St_2) определено с точностью до замены римановых V_i , $i = 1, 2$, изометричными или V_i^* и замены групп Ψ_i преобразованными (изометриями) группами Ψ_i^* .

В связи с этой теоремой назовем многообразия V_i и группы Ψ_i , $\Psi_1 + \Psi_2$ присоединенными к паре (V^n, St_2) .

Теорема 3. Пусть V_i , $i = 1, 2$, — риманово пространство, Ψ_i — группа его изометрий, причем группа Ψ_1 изоморфна Ψ_2 и $\Psi_1 + \Psi_2 (= \Psi)$ свободно действует на $V_1 \times V_2$.

Тогда риманово $V^n = V_1 \times V_2 / \Psi$ полно и приводимо, причем отображение $\Xi = \text{id}$ является представлением пары (V^n, St_2) . Через каждую почти точку $p \in V^n$ проходят листы $\mathcal{V}_i(p)$ из St_2 , изометричные V_i .

Пусть $\mathcal{V}$ — лист из St_2 на (приводимом) V^n , накрытый листом $\overline{\mathcal{V}}$ из естественной двулистной структуры произведения $V_1 \times V_2$, соответствующего какому-либо представлению пары (V^n, St_2) . Лист $\overline{\mathcal{V}}$ определяет некоторую подгруппу группы Ψ , его сохраняющую. При переходе от $\overline{\mathcal{V}}$ к листу, накрывающему тот же лист $\mathcal{V}$, подгруппа эта заменится подгруппой, ей сопряженной. Таким образом, листу $\mathcal{V}$ (и представлению Ξ) соответствует некоторый класс сопряженных подгрупп Ψ . При переходе от Ξ к Ξ^* класс этот будет заменен соответствующим (по изометрии $V_1 \times V_2$ на $V_1^* \times V_2^*$) классом подгруппы Ψ^* .

Лист $\mathcal{V}$ назовем регулярным, если соответствующий ему класс содержит лишь тождественное преобразование, и вполне иррегулярным, если этот же класс совпадает с группой Ψ .

Разумеется, эти свойства листа не зависят от выбора Ξ (см. теорему 2).

Наконец, точку $p \in V^n$ назовем регулярной (относительно St_2), если проходящие через нее оба листа из St_2 регулярны.

Теорема 4. Множество точек всех иррегулярных листов из St_2 , так же как и множество всех иррегулярных (относительно St_2) точек приводимого V^n , имеет меру нуль.

Теорема 5. Все регулярные листы St_2 из одного семейства изометричны, регулярный лист является накрывающим пространством для любого иррегулярного листа того же семейства.

Теорема 6. Пусть дана пара (V^n, St_2) и точка $p \in V^n$ регулярна (относительно St_2).

Тогда на (регулярных) листах $\mathcal{V}_i(p)$, $i = 1, 2$, парой (V^n, St_2) определены группы $\Psi_i(p)$ изометрий $\mathcal{V}_i(p)$ (на себя), обладающие (вместе с $\mathcal{V}_i(p)$) свойствами групп Ψ_{ip} теоремы 1.

Теорема 7. Число точек пересечения двух регулярных листов $\mathcal{U}_i$ из различных семейств структуры St_2 равно порядку присоединенной к паре (V^n, St_2) группы Ψ .

Теорема 8. Пусть $\mathcal{U}_1(p'_0)$ и $\mathcal{U}_1(p''_0)$ — два регулярных листа структуры St_2 (из одного семейства), проходящие соответственно через p'_0 и p''_0 , и w'' — одна из точек пересечения регулярного листа $\mathcal{U}_2(p''_0)$, $p''_0 \in \mathcal{U}_1(p'_0)$, другого семейства с листом $\mathcal{U}_1(p'_0)$.

Тогда существует точно одна изометрия

$$R(w''): \mathcal{U}_1(p'_0) \rightarrow \mathcal{U}_1(p''_0)$$

на лист $\mathcal{U}_1(p''_0)$, которая точке $p' \in \mathcal{U}_1(p'_0)$ ставит в соответствие точку пересечения p'' листа $\mathcal{U}_2(p')$ с листом $\mathcal{U}_1(p''_0)$, причем точке p''_0 соответствует w'' .

Теорема 9. Если $\mathcal{U}_1(p_0)$ — вполне иррегулярный (проходящий через точку $p_0 \in V^n$) лист структуры St_2 на приводимом V^n , то V^n — косое произведение с базой — $\mathcal{U}_1(p_0)$, стандартным слоем V_2 , слоем над p ($\in \mathcal{U}_1(p_0)$) — листом $\mathcal{U}_2(p)$ из St_2 и структурной группой $\Psi_1(V_1)$ и Ψ_1 соответствует какому-либо представлению Ξ .

Примером может служить лист Мёбиуса (или бутылка Клейна), «горловая» траектория которого вполне иррегулярна.

Инволютивное (голоморфное) распределение $\mathcal{M}$ на многообразии X^n называется суперинволютивным⁽³⁾, если существует такая адаптированная к $\mathcal{M}$ координатная пара (V, φ) (см. ⁽⁴⁾, стр. 133), что различным сечениям «куба» V (представляющим собою интегральные многообразия распределения $\mathcal{M}$) соответствуют различные максимальные интегральные многообразия, их (т. е. сечения) содержащие. Суперинволютивность $\mathcal{M}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы на множестве $(\mathcal{M})$ максимальных интегральных многообразий распределения $\mathcal{M}$ могла быть определена дифференциальная структура (вообще говоря, не отделимая), при которой естественное отображение $X^n \rightarrow \widetilde{\mathcal{M}}$ дифференцируемо и регулярно. Если X^n компактно, то $\mathcal{M}$ отделимо.

Теорема 10. Пусть дана пара (V^n, St_2) .

Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы присоединенная (к паре и ее представлению Ξ) группа Ψ_1 (или Ψ_2) свободно действовала на V_1 (или V_2), является суперинволютивность распределения $\mathcal{M}_2$ (или $\mathcal{M}_1$), которым — вместе с $\mathcal{M}_1$ — определено St_2 .

Например, группа Ψ_2 в рассмотренном выше случае листа Мёбиуса действует свободно на траектории V_2 (длины $2a$) и согласно теореме распределение $\mathcal{M}_1$ («листами» которого являются прямолинейные образующие) суперинволютивно, группа же Ψ_1 не действует свободно и, как следовало ожидать, распределение $\mathcal{M}_2$ не суперинволютивно (суперинволютивность нарушается на «горловой» траектории).

Горьковский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
9 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ C. De Rahm, Comment. Math. Helv., 26, 328 (1952). ² Д. Громоу, В. Клиффорд, В. Мейер, Риманова геометрия в целом, М., 1971. ³ Я. Л. Шапиро, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 11 (1971). ⁴ Клод Шевалле, Теория групп Ли, ИЛ, 1948.