

Д. АДНАДЖЕВИЧ (ФНРЮ)
ТОПОЛОГИЯ И ПОРЯДОК

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 III 1972)

Множество, наделенное двумя структурами — структурой порядка и топологической структурой, — было предметом рассмотрения ряда авторов. В основном были исследованы связи между порядком и топологией в T_1 -пространствах. Здесь рассматриваются самые общие топологические пространства и некоторые их связи с порядком, которым наделен носитель пространства. Конечно, если топология более богатая и порядок более сильный, то и взаимоотношения могут оказаться более разнообразными.

Введем некоторые обозначения. Пусть (X, ρ) — упорядоченное множество, где ρ является отношением порядка со свойством рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Обозначим

$$x \rho' y \Leftrightarrow y \rho x,$$

$$x \overset{\circ}{\rho} y \Leftrightarrow x \rho y, \quad x \neq y,$$

$$x \bar{\rho} y \Leftrightarrow x \rho y \quad \text{или} \quad y \rho x,$$

$$x \|_{\rho} y (x \| y) \Leftrightarrow x \text{ не находится в отношении } \rho \text{ с } y$$

$$x \bar{\rho} y \Leftrightarrow x \rho y \quad \text{или} \quad x \| y.$$

Отображение $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \tau)$ будем называть: а) изотонным, если $x \rho y \Rightarrow f(x) \tau f(y)$, б) дуально изотонным, если $f(x) \tau f(y) \Rightarrow x \rho y$, в) гомоморфным, если $x \rho y \Leftrightarrow f(x) \tau f(y)$.

Подмножества $A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$, множества (X, ρ) будем называть упорядоченно разделенными, если для каждой пары $x \in A$, $y \in B$ имеет место условие $x \bar{\rho} y$ или для каждой пары $x \in A$, $y \in B$ имеет место условие $y \rho x$. Если особенно $B = \{b\}$, то будем говорить, что множество A и точка b упорядоченно разделены.

Пусть на множестве X даны топология $\mathcal{U}$ и порядок ρ в обозначении $(X, \mathcal{U}, \rho)$. Для непересекающихся множеств $A, B \subset X$ будем говорить, что они упорядоченно отделимы, если существуют упорядоченно разделенные окрестности $U \supset A$, $V \supset B$ в пространстве X .

Определение 1. Топология $\mathcal{U}$ и порядок ρ на множестве X согласованы между собой, если удовлетворяют условию: для каждой пары $a, b \in X$, для которой существует окрестность $U(a) \subset X$ точки a , $b \notin U(a)$, существует окрестность $V(a)$, $V \subset U$, так что V и b упорядоченно разделены.

Определение 2. Пространство $(X, \mathcal{U}, \rho)$ называется O_0 -пространством, если для каждой пары $a, b \in X$ хотя бы одна точка имеет окрестность, упорядоченно разделенную с другой точкой. Пространство $(X, \mathcal{U}, \rho)$ называется O_1 -пространством, если каждая точка пары $a, b \in X$ имеет окрестность, упорядоченно разделенную с другой точкой. Пространство $(X, \mathcal{U}, \rho)$ называется O_2 -пространством, если каждые две точки упорядоченно отделимы (см. ^(1, 3, 5-7)).

Очевидны следующие предложения.

Предложение 1. Пусть $(A, \mathcal{U}_A, \rho_A)$ — подпространство пространства $(X, \mathcal{U}, \rho)$ с индуцированными топологией и порядком. Если тополо-

гия $\mathcal{U}$ согласована с порядком ρ , то и топология $\mathcal{U}_A$ согласована с порядком ρ_A .

Предложение 2. Пространство $(X, \mathcal{U}, \rho)$ является O_i -пространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{U} — T_i$ -топология и она согласована с порядком ρ , где $i \in \{0, 1\}$.

Предложение 3. Каждое O_2 -пространство является хаусдорфовым пространством, в котором топология согласована с порядком.

Теперь приведем несколько простых свойств упорядоченных пространств.

Предложение 4. Пусть $f: (X, \mathcal{U}, \rho) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, \tau)$ — непрерывное, открытое и дуально изотонное отображение. Если топология $\mathcal{U}$ согласована с порядком ρ , то и топология $\mathcal{V}$ согласована с порядком τ . $\square$

Предложение 5. Пусть $f: (X, \mathcal{U}, \rho) \rightarrow (Y, \mathcal{V}, \tau)$ — сюръективное отображение T_2 -пространства X в T_2 -пространство Y . Если f открыто и дуально изотонно, то из O_2 -упорядоченности пространства X следует O_2 -упорядоченность пространства Y . Если f непрерывно и изотонно, то из O_2 -упорядоченности пространства Y следует O_2 -упорядоченность пространства X . $\square$

Назовем множество $A \subset (X, \mathcal{U}, \rho)$ возрастающим (убывающим), если из $a \rho b, a \in A$ ($a \rho b, b \in A$) следует $b \in A$ ($a \in A$).

Предложение 6. Пусть $(X, \mathcal{U}, \rho)$ — хаусдорфово пространство. Топология $\mathcal{U}$ тогда и только тогда согласована с порядком ρ , когда для каждой пары $a, b \in X, a \bar{\rho} b$ существуют убывающая окрестность U точки a и возрастающая окрестность V точки $b, U \cap V = \emptyset$ (окрестности не обязательно открыты) (см. (6)). $\square$

Приведем некоторые примеры топологических пространств, обладающих структурой порядка.

Пример 1. Дискретное пространство отождествляется с упорядоченным множеством (см. (2)). Оно является O_0 -пространством.

Пример 2. Топологическая решетка, обладающая T_1 -топологией, является пространством, имеющим топологию, согласованную с порядком решетки. Заметим, что если топология в топологической решетке $(X, \mathcal{U}, \rho)$ является T_2 -топологией, то $(X, \mathcal{U}, \rho)$ — O_2 -пространство.

В дальнейшем будем исследовать некоторые свойства более общих топологических пространств, наделенных отношением порядка, согласованного с топологией. Предположим, что у нас есть два упорядоченных множества $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2)$. В множестве $X_1 \cup X_2 = X$ определим отношение $\rho_1 \cap \rho_2 = \rho$ следующим образом:

1^o) $x \rho y \Leftrightarrow x \rho_i y, x, y \in X_i$ и хотя бы один из элементов x, y принадлежит множеству $X_i \setminus (X_1 \cap X_2), i = 1, 2$;

2^o) $x \rho y \Leftrightarrow x \rho_i y \quad \forall i \in \{1, 2\}, x, y \in X_1 \cap X_2$;

3^o) отношение ρ транзитивно.

Легко показать, что отношение $\rho_1 \cap \rho_2 = \rho$ является отношением порядка в множестве X .

Замечание. Порядок на множестве $X_i, i = 1, 2$, индуцированный порядком $\rho = \rho_1 \cap \rho_2$ множества X , не сильнее порядка ρ_i .

Предложение 7. Пусть топологии $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ согласованы с порядками ρ_1, ρ_2 соответственно. Если инъекции $i: X_1 \rightarrow X_1 \cup X_2$ для $i \in \{1, 2\}$ открыты и $X_1 \cup X_2$ замкнуто в $X_1 \cup X_2$, то топология $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ топологической суммы согласована с порядком $\rho_1 \cap \rho_2$ пространства $(X_1 \cup X_2, \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2, \rho_1 \cap \rho_2)$. $\square$

Рассмотрим теперь произведение $X = \prod X_\alpha, \alpha \in A$, топологических пространств (X_α, ρ_α) с порядками ρ_α . Пусть пространство X обладает порядком ρ со свойством

$$\{x_\alpha\} \rho \{y_\alpha\} \Leftrightarrow x_\alpha \rho_\alpha y_\alpha, \forall \alpha \in A.$$

Теорема 1. В топологическом произведении $X = \prod X_\alpha, \alpha \in A$, пространств $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \rho_\alpha)$ топология $\mathcal{U}$ согласована с порядком ρ тогда и толь-

ко тогда, когда топология $\mathcal{U}_\alpha$ каждого пространства X_α , $\alpha \in A$, согласована с порядком ρ_α .

Доказательство. Пусть $x = \{x_\alpha\}$, $y = \{y_\alpha\}$, $\alpha \in A$, — две функции пространства X , $x \bar{\rho} y$ и U — открытое множество, $x \in U$, $y \notin U$. Множество U является объединением множеств вида $\bigcap_{i=1}^{\delta} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}^\beta)$, где p_{α_i} — проекция пространства X на пространстве X_{α_i} . Должно существовать

одно β , пусть это будет $\beta = \delta$, для которого $\{x_\alpha\} \in \bigcap_{i=1}^{i_\delta} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}^\delta)$. Пусть $x_{\alpha_k}^\delta \in U_{\alpha_k}^\delta$, $y_{\alpha_k}^\delta \notin U_{\alpha_k}^\delta$, $1 \leq k \leq i_\delta$. Тогда в пространстве X_{α_k} существует открытое множество $V_{\alpha_k}^\delta \subset U_{\alpha_k}^\delta$, $x_{\alpha_k}^\delta \in V_{\alpha_k}^\delta$, $z_{\alpha_k}^\delta \bar{\rho}_{\alpha_k} y_{\alpha_k}^\delta$ для всех $z_{\alpha_k}^\delta \in V_{\alpha_k}^\delta$. Множество $p_{\alpha_k}^{-1}(V_{\alpha_k}^\delta) \cap (\bigcap_{i=1}^{i_\delta} p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}^\delta))$ исконое.

Обратно, пусть в пространстве (X_δ, ρ_δ) существует окрестность U_δ , $x_\delta \in U_\delta$; $y_\delta \notin U_\delta$, такая, что в нее нельзя вписать окрестность, упорядоченно разделенную с точкой y_δ . Берем в пространстве $X = \prod X_\alpha$, $\alpha \in A$, функции $x = \{x_\alpha\}$, $y = \{y_\alpha\}$, $\alpha \in A$ такие, что $p_\alpha(x) = p_\alpha(y)$, $\alpha \neq \delta$, $p_\delta(x) = x_\delta$, $p_\delta(y) = y_\delta$. Очевидно, в окрестность $p_\delta^{-1}(U_\delta)$ функции x нельзя вписать окрестность, упорядоченно разделенную с функцией y . $\square$

Теорема 2. Произведение $X \neq \prod X_\alpha$, $\alpha \in A$, является O_2 -пространством только тогда, когда каждое из пространств $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \rho_\alpha)$, $\alpha \in A$ есть O_2 -пространство.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$ — две разные точки, $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $y = \{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \bar{\rho}_\alpha y_\alpha$. Существует $\delta \in A$, $x_\delta \bar{\rho}_\delta y_\delta$. Берем окрестности $U_x^\delta \ni x_\delta$, $U_y^\delta \ni y_\delta$ точек x_δ, y_δ , $x \bar{\rho}_\delta y$, $u \in U_x^\delta$, $v \in U_y^\delta$. Открытые множества $p_\delta^{-1}(U_x^\delta)$, $p_\delta^{-1}(U_y^\delta)$ упорядоченно отделимы. Необходимость условия доказывается, как и в теореме 1. $\square$

Займемся теперь фактор-пространствами. Пусть дано пространство $(X, \mathcal{U}, \rho)$ и его фактор-пространство $(X^*, \mathcal{U}^*)$, в котором порядок ρ^* определим следующим образом:

$$x^* \rho^* y^* \Leftrightarrow x \rho y \quad \forall x, y, x \in p^{-1}x^*, y \in p^{-1}y^*,$$

где p означает каноническое отображение $p: X \rightarrow X^*$ (см. (4)).

Теорема 3. Если порядок ρ и топология $\mathcal{U}$ согласованы в дискретном пространстве $(X, \mathcal{U}, \rho)$ и отношение эквивалентности в пространстве X является открытым, то и индуцированные порядок ρ^* и топология $\mathcal{U}^*$ согласованы в фактор-пространстве $(X^*, \mathcal{U}^*, \rho^*)$.

Доказательство. Пусть $A^*, B^* \in X^*$ — элементы фактор-пространства $(X^*, \mathcal{U}^*, \rho^*)$, где X является дискретным пространством, $U^* \ni A^*$ — окрестность точки A^* , не содержащая B^* , и $A^* \rho^* B^*$. Тогда $A = p^{-1}(A^*) \subset p^{-1}(U^*) = U$, и $U \cap B = \emptyset$, $B = p^{-1}(B^*)$. Фиксируем $a_\alpha \in A$; для каждого $b_\beta \in B$ существует открытое множество $V_{\alpha\beta} \ni a_\alpha$, упорядоченно разделенное с b_β , даже со свойством $x \bar{\rho} b_\beta$, $x \in V_{\alpha\beta}$. Обозначим $W_\alpha = \bigcap_{b_\beta \in B} V_{\alpha\beta}$. Открытое множество $W = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha \subset U$ упорядоченно разделено с B . Следовательно, множество $p(W) \subset U^*$, как канонический образ открытого в X множества, открыто в X^* и упорядоченно разделено с B^* .

В случае $A^* \parallel_{\rho^*} B^*$ доказательство такое же. $\square$

Предложение 8. Пусть отношение эквивалентности в пространстве $(X, \mathcal{U}, \rho)$ является открытым. Если существует пространство $(Y, \mathcal{V}, \tau)$ с согласованными топологией и порядком и непрерывные отображения $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X^*$, $g \circ f = p$, f изотонно, g дуально изотонно, то топология $\mathcal{U}^*$ и порядок ρ^* согласованы.

Доказательство. Пусть $A^* \bar{p}^* B^*$, $A^* B^* \in X^*$, и $U^* \ni A^*$ — открытое множество в X^* , не содержащее точку B^* . Берем $a \in g^{-1}(A^*)$, $b \in g^{-1}(B^*)$. В $g^{-1}(U^*)$ впишем открытое множество W , упорядоченно разделенное с b . Множество $f^{-1}(W)$ открыто в X , содержит точку $a' \in f^{-1}(a)$ и упорядоченно разделено с точкой $b' \in f^{-1}(b)$. В силу предположений классы эквивалентности, содержащие a' и b' , различны; обозначим эти классы A и B соответственно. Берем множество $(p^{-1} \circ p \circ f^{-1})(W) = V$. Из условия $x \bar{p} y$, $x \in f^{-1}(W)$, $y \in B$, следует, что множества $p(V)$ и $p(b') = \{B^*\}$ упорядоченно разделены. Множество $p(V) \subset U^*$ открыто, откуда следует утверждение предложения. $\square$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 III 1972

Белградский университет
Югославия

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. Adnadjevic, Матем. вестник, **7** (22), № 1 (1970). ² P. Alexandroff, Матем. сборник, **2**, № 3 (1937). ³ E. S. Wolk, Proc. Am. Math. Soc., **9**, 524 (1958). ⁴ S. D. McCartan, Proc. Camb. Phil. Soc., **64**, 347 (1968). ⁵ S. D. McCartan, ibid., p. 965. ⁶ L. Nachbin, Topology and Order, N. Y., 1965. ⁷ A. and M. Secanina, Arch. Math., **2** (1966). ⁸ G. Szasz, Introduction to Lattice Theory, N. Y., 1963.