

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Б. К. АМОНОВ, С. П. ШИШАТСКИЙ

**АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ С ДАННЫМИ
НА ВРЕМЕНИ ПОДОБНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ 2-ГО ПОРЯДКА И СВЯЗАННЫЕ С НЕЮ
ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ**

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 28 II 1972)

Теорема единственности решения задачи Коши с данными на времени-подобной поверхности для параболического уравнения 2-го порядка была доказана почти одновременно С. Мизохата ⁽¹⁾ и М. Проттером ⁽²⁾. В данной заметке мы формулируем полученную нами оценку решения этой задачи в зависимости от максимума модулей данных Коши и их внутренних производных. При этом мы предполагаем, что решение существует в некоторой области пространства (t, x) и ограничено всюду в этой области вместе со своими первыми производными постоянной 1. Наша оценка позволяет установить некоторые новые теоремы единственности для решений параболических уравнений, две из которых приведены ниже. Для получения оценки мы в целом следовали несколько усовершенствованной методике М. Проттера. Отметим, что аналогичные результаты для уравнения с одной пространственной переменной были ранее получены Е. М. Ландисом ⁽³⁾.

Теорема 1. Пусть функция $u(t, x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, однократно непрерывно дифференцируема по переменным (t, x) в области V пространства (t, x) , описываемой неравенствами

$$-T \leq t \leq T, \quad -X \leq x_i \leq X, \quad i = 2, \dots, n, \quad 0 \leq x_1 \leq 2,$$

где T и X — некоторые положительные постоянные, причем

$$\max_{(t, x) \in V} |u(t, x)|, \quad \max_{(t, x) \in V} |\nabla_x u| \leq 1.$$

Пусть, кроме того, $u(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$(Mu)^2 \leq d_1 u^2 + d_2 (\nabla_x u)^2,$$

где

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2$$

($\mu > 0$ постоянная, $(t, x) \in \bar{V}$), и

$$\max \left(|a_{ij}|, \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right|, \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right|, d_1, d_2 \right) \leq d, \quad i, j, k = 1, \dots, n; \quad (t, x) \in \bar{V}.$$

Пусть, наконец, на пересечении $\bar{V}$ плоскостью $x_1 = 0$ заданы данные Коши: $u(t, 0, x_2, \dots, x_n)$, $\frac{\partial}{\partial x_1} u(t, 0, x_2, \dots, x_n)$, причем

$$\max \left\{ |u(t, 0, x_2, \dots, x_n)|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(t, 0, x_2, \dots, x_n) \right|, \left| \frac{\partial}{\partial t} u(t, 0, x_2, \dots, x_n) \right| \right\} \leq \varepsilon.$$

Тогда существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, зависящие лишь от d, μ и n и такие, что имеет место неравенство

$$|u(0, 1, 0, \dots, 0)| \leq C_1 \varepsilon^K, \quad K = \exp[-C_2(1 - \ln T + X^{-1})].$$

Теорема 2. Существует постоянная $C_3 > 0$, зависящая лишь от d, μ и n и такая, что если

$$\max_{\substack{-X \leq x_2, \dots, x_n \leq X \\ -t \leq \tau \leq t \\ k \geq 1}} \left\{ |u(\tau, 0, x_2, \dots, x_n)|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(\tau, 0, x_2, \dots, x_n) \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{\partial}{\partial \tau} u(\tau, 0, x_2, \dots, x_n) \right| \right\} \leq \exp(-t^{-C_3}),$$

то $u(0, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$.

Теорема 3. Существует постоянная $C_4 > 0$, зависящая лишь от d, μ и n и такая, что если

$$\max_{\substack{-\xi \leq x_2, \dots, x_n \leq \xi \\ -T \leq t \leq T \\ k \geq 1}} \left\{ |u(t, 0, x_2, \dots, x_n)|, \left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(t, 0, x_2, \dots, x_n) \right|, \right. \\ \left. \left| \frac{\partial}{\partial t} u(t, 0, x_2, \dots, x_n) \right| \right\} \leq \exp(-\exp[\xi^{-(8+\delta)}]),$$

где $\delta > 0$ любое, то $u(t, x) \equiv 0$.

В заключение авторы выражают благодарность чл.-корр. АН СССР М. М. Лаврентьеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
18 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mizohata, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, **31**, Mathematics, № 3, 219 (1958). ² M. H. Protter, Canad. J. Math., **13**, 331 (1961). ³ Е. М. Ландис, УМН, **14**, в. 1 (85), 21 (1959).