Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

М. Я. АНТОНОВСКИЙ, В. З. ПОЛЯКОВ

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ БЛИЗОСТИ И МЕТРИКИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 18 X 1971)

В работе [2] авторов этой статьи были рассмотрены решетки $\mathrm{T}(X)$, $\mathrm{Б}(X)$ и $\mathrm{P}(X)$ всех топологий, всех обобщенных (т. е. несимметричных) близостей и равномерностей на множестве X, а также гомоморфизмы этих решеток, определяемые принятием соответствующей более грубой структуры:

$$\mathrm{P}(X) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Б}(X) \xrightarrow{\chi} \mathrm{T}(X).$$

Пусть функтор p: $\mathrm{Б}(X) \to \mathrm{P}(X)$ соотносит каждой близости ее (прекомпактную) равномерность, базисные окружения которой суть дополнения к произведениям далеких в X множеств; нами было показано, что $p(\delta \vee \delta') = p(\delta) \vee p(\delta')$ для любых $\delta, \delta' \in \mathrm{Б}(X)$. Более того, если $u \in \psi^{-1}\psi(u \vee p(\delta))$ для некоторой равномерности u, то $\psi(u \vee p(\delta)) = \delta$.

Равномерность $u \in \mathrm{P}(X)$ мы называем WM-равномерностью, если замкнутые (в смысле топологии $\chi\psi(u)$) окружения образуют ее базу; близость $\delta \in \mathrm{Б}(X)$ называется WM-близостью, если из $A\bar{\delta}B$ следует $[A]\bar{\delta}[B]$. Это свойство эквивалентно также тому, что всякие два далекие множества можно заключить в далекие же (или просто непересекающиеся) открытые окрестности, и, таким образом, WM-пространства можно рассматривать как «близостно хаусдорфовы». Оказывается, близость δ тогда и только тогда является WM-близостью, когда $p(\delta)$ является WM-равномерностью. Множество всех WM^*-близостей (т. е. таких, для которых сопряженная так же есть WM-близость) из класса $\chi^{-1}(t)$, где t — локально компактная топология, образуют полную решетку, в которой наибольшим и наименьшим элементами являются симметричные близости Стоуна — Чеха β и Александрова o (соответствующая одноточечной компактификации), в то время как для произвольных топологий это множество не является решеткой.

В работах [4, 7] было показано, что для каждой топологии $t \in \mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \ldots$ (здесь T_i означают классы топологий, удовлетворяющих соответствующей аксиоме отделимости) существует обобщенная метрика, обладающая заданным алгебраическим свойством $\mathfrak{M}_i$, и, наоборот, каждая метрика ρ, обладающая свойством $\mathfrak{M}_i$, порождает топологию $t = \chi\psi\varphi(\rho) \in \mathrm{T}_i$. Одна из задач настоящей заметки — дать внутреннее описание классов метрик, проектируемых естественным гомоморфизмом в соответствующие классы $\mathrm{T}_i(X)$. Отметим, что при этом разные классы близостей могут проектироваться в один и тот же класс топологий. В качестве примера укажем на класс «близостно хаусдорфовых» пространств, близостно вполне регулярных (удовлетворяющих условию: если $x \notin [M]$, то существует близостно непрерывная функция, отделяющая x от M), и классические нормальные пространства близости, введенные еще В. А. Ефремовичем, проектирующиеся на один и тот же класс — вполне регулярных топологических пространств. Остается открытой, однако, общая характеристика классов пространств, порождаемых метриками, аналогичными $\mathfrak{M}_2$ (то же для $\mathfrak{M}_3$ и $\mathfrak{M}_4$).

Известно, что несимметричные равномерности совмещаются с любыми несимметричными близостями, которые, в свою очередь, униформизуют любые топологии ([6]). Отметим, все же, что «связанность» несимметричных структур с порождаемыми ими более грубыми, вообще говоря, существенно слабее, чем у симметричных: можно указать например, на то обстоятельство, что естественная (прекомпактная!) близость открытого интервала порождается некоторыми неограниченными метриками. Так, если рассмотреть несимметричную метрику на прямой линии $\rho(x, y) = \max\{0, y - x\}$, то нетрудно убедиться, что ее близость грубее близости интервала; верхняя грань ее равномерности (этой метрики) и прекомпактной равномерности интервала совмещается, как отмечалось выше, с близостью интервала. Ниже мы предложим аксиому отделимости, которая дезавуирует равномерности подобного вида.

Пусть теперь Δ — произвольное непустое множество и R^Δ — тихоновское полуполе, т. е. кольцо всех действительных функций $\Delta \to R$, взятое в тихоновской топологии и с естественным частичным порядком. Пусть, далее X — некоторое множество. Функция ρ: $X^2 \to R^\Delta$ называется метрикой в X над полуполем R^Δ ([1, 3, 4]), если она удовлетворяет обычным аксиомам псевдометрик. Если она удовлетворяет также аксиоме

$$x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) \neq 0, \tag{1}$$

мы будем называть ее положительной. Симметричные метрики, т. е. удовлетворяющие $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, удовлетворяют также любой из следующих аксиом:

$$x \neq y \Rightarrow \rho(x, y) + \rho(y, x) > 0; \tag{2}$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) = 0 \Rightarrow x = y; \tag{3}$$

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) \geqslant \inf\{\rho(x, y), \rho(y, x)\}; \tag{4}$$

$$\rho(x, z) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, y); \tag{5}$$

для любого $x \in X$ и любого $q \in \Delta$ имеется $q^* \in \Delta$ такой, что для произвольных $y, z \in X$ выполняется аксиома Болтянского ([4])

$$(\rho(x, z))_{q^*} + (\rho(y, z))_{q^*} \geqslant (\rho(x, y))_q. \tag{6}$$

Пусть $q_1, q_2 \in \Delta$; полагаем $q_1 \leqslant q_2$, если для произвольных точек $x, y \in X$ справедливо $(\rho(x, y))_{q_1} \leqslant (\rho(x, y))_{q_2}$. Это отношение вводит на множестве Δ частичный порядок; если при этом Δ оказывается направленным множеством, то и метрика ρ называется направленной (Мрувка). Каждая направленная метрика порождает «естественную» близость ([1]) условием $A \,\delta\, B \Leftrightarrow \rho(A, B) \equiv \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A,\ y \in B\} = 0 \in R^\Delta$ и, напротив, любую близость можно метризовать направленной метрикой. Естественно ожидать, что различные (перечисленные выше) типы метрик порождают различные типы близостей.

По аналогии с топологическими пространствами, будем понимать под $Б_0$-пространством близости такое, в которое для любых двух точек $x, y \in X$ справедливо $x \bar{\delta}\, y \vee y \bar{\delta}\, x$, а под $Б_1$-пространствами — те, в которых из $x \neq y$ следует $x \bar{\delta}\, y \,\&\, y \bar{\delta}\, x$.

Теорема 1. *Пространство близости $P = X^\delta$ тогда и только тогда удовлетворяет аксиоме отделимости $Б_0$, когда его можно метризовать с помощью метрики, удовлетворяющей аксиоме* (2); *соответственно удовлетворяет аксиоме отделимости $Б_1$, когда оно метризуется посредством метрики, удовлетворяющей* (1) *или* (3).

Доказательство аналогично доказательствам теорем 1—3 из работы ([4]). Установим, например, эквивалентность $Б_1 \Leftrightarrow (3)$. Рассмотрим для этого вспомогательное (эталонное) пространство близости из трех элементов $G = \{a, b, c\}$, в котором b близко к каждому из двух других элементов, а прочие элементы далеки от любого другого. В этом пространстве можно ввести метрику σ, полагая $\sigma(x, y) = 0$, если $\{x\}\delta\{y\}$, и $\sigma(x, y) = 1$ в противном случае. Рассмотрим теперь для произвольного $Б_1$-пространва P совокупность всех эквинепрерывных отображений $P \to G$; обозначив получившееся множество через Δ, рассмотрим в P метрику ρ: $P \to R^\Delta$, полагая при $q \in \Delta$ $(\rho(x, y))_q = \sigma(qx, qy)$. Проверяем, что близость δ совпадает с близостью построенной таким образом метрики: если $A\,\delta\,B$, то, для любого $q \in \Delta$, $q(A)\,\delta\,q(B)$, т. е. $(\rho(A, B))_q = 0$ и, таким образом, $\rho(A, B) = 0$; наоборот, если $A\,\bar\delta\,B$, то, определив эквинепрерывное q_0: $P \to G$ условиями $q(A) = \{a\}$ и $q(B) = \{b\}$, будем иметь, очевидно, $(\rho(A, B))_{q_0} = 1$. Метрика удовлетворяет требуемой аксиоме: если $x \neq y$, то $\{x\}\bar\delta\{y\}$ и $\{y\}\bar\delta\{x\}$, поэтому отображение q_1: $P \to G$, определяемое как $q_1(x) = a$, $q_1(y) = c$ и $q_1(p) = b$ при прочих $p \in P$, эквинепрерывно, а следовательно, $(\rho(x, y))_{q_1} = (\rho(y, x))_{q_1} = 1$.

Будем называть пространство близости $Б_2$-пространством (соответственно $Б_3$-пространством), если произвольные его различные точки (точку и не содержащее ее замкнутое множество) можно заключить в далекие открытые окрестности.

Теорема 2. *Пространство близости, порождаемое направленной метрикой, удовлетворяющей аксиомам* (3) *и* (4) (*соответственно* (3) *и* (6), (3) *и* (5)), *удовлетворяет аксиомам отделимости* $Б_2$ (*соответственно* $Б_3$).

Докажем, например, последнее. Пусть $A\bar\delta B$, т. е. $\rho(A, B) = \varepsilon \neq 0$. Значит, существует $q \in \Delta$ с $\varepsilon q = 3h > 0$. Обозначим $U = \{\alpha \in R^\Delta \mid -h < \alpha_q < h\}$ и пусть $\Omega(A, U) = \bigcup\{\{x \in P \mid \rho(a, x) \in U\} \mid a \in A\}$, аналогично $\Omega(B, U)$. Построенные окрестности открыты, причем $\Omega(A, U) \cap \Omega(B, U) = \phi$. Действительно, если бы существовал $x \in \Omega(A, U) \cap \Omega(B, U)$, то существовали бы также $a \in A$ и $b \in B$ с $(\rho(a, x))_q < h > (\rho(b, x))_q$ и, следовательно, $\rho(a, x) + \rho(b, x) \geqslant \rho(a, b) \geqslant \varepsilon$ не могло бы выполняться.

Следствие. *Топологическое пространство хаусдорфово, соответственно регулярно, вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно может быть метризовано посредством метрики, удовлетворяющей аналогичным аксиомам* (*см.* ([4])).

В самом деле, максимальные близости T_2- и T_3-пространств суть $Б_2$-, соответственно $Б_3$-пространства, причем их открытые подмножества уединены (далеки от дополнений), и поэтому, поступая аналогично ([4]), убеждаемся в возможности метризации этих пространств близости посредством требуемых метрик; вполне регулярные пространства можно метризовать симметричными метриками, которые, конечно, удовлетворяют всем требуемым аксиомам.

Определение. Направленную метрику ρ: $X^2 \to R^\Delta$ на множестве X (в частности, любую действительную псевдометрику) будем называть вейлевской, если для любых A, $B \subset X$ из $\inf\{\rho(a, b) + \rho(b, a) \mid a \in A, b \in B\} \neq 0$ следует, что существуют разложения $A = \bigcup\{A_i \mid i \leqslant n\}$, $B = \bigcup\{B_j \mid j \leqslant m\}$ этих множеств в объединения конечного числа слагаемых, удовлетворяющих $\rho(A_i, B_j) + \rho(B_j, A_i) \neq 0$ при любых i и j.

Очевидно, все симметричные направленные метрики суть вейлевские. Примером несимметричной вейлевской метрики может служить «односторонняя» метрика на отрезке или интервале (в отличие от аналогичной метрики на бесконечной прямой).

Теорема 3. *Пусть f: $P \to M$ — эквинепрерывное отображение пространства близости в метрическое пространство, метризованное вейлевской метрикой. Отображение f: $sP \to sM$ их верхних симметризаций эквинепрерывно.*

Доказательство. Пусть $K \cup L \subset M$ и $f^{-1}K\bar\delta f^{-1}L$ в пространстве sP. Последнее означает, что для любых объединений вида $f^{-1}K = \bigcup\{A_i \mid i \leqslant n\}$, $f^{-1}L = \bigcup\{B_j \mid j \leqslant m\}$ имеется пара A_i, B_j множеств, близких одновременно и в P, и в P^*. Тогда $\rho(fA_i, fB_j) = 0$ и $\rho(fB_j, fA_i) = 0$. Остается добавить, что $\bigcup\{fA_i \mid i \leqslant n\} = K$ и $\bigcup\{fB_j \mid j \leqslant m\}$ суть произвольные разложения K и L в объединения конечного числа слагаемых множеств, а метрики $\rho + \rho^*$ и $\rho \vee \rho^*$ эквиморфны.

С л е д с т в и е. *Если M — вейлевское метрическое пространство, то* $s\psi\varphi M = \psi\varphi s M$.

Равномерность u назовем в е й л е в с к о й, если для каждого $U \in u$ имеется конечное число равномерно непрерывных действительных вейлевских псевдометрик ρ_i с $\bigcap \{\{(x, y) \mid \rho_i(x, y) < 1\} \mid i \leqslant n\} \subset U$.

Отметим, что вейлевскими являются все прекомпактные равномерности и, конечно, все симметричные. Если u и v вейлевские, то $u \vee v$ также вейлевская; поэтому $u^\delta = u \vee p(\delta) \in \psi^{-1}(\delta)$ вейлевская, если вейлевская u.

Пространство близости будем называть п р а в и л ь н ы м (в п о л н е о г р а н и ч е н н ы м), если оно обладает наибольшей (единственной) вейлевской равномерностью.

Следующие три результата обобщают аналогичные утверждения о симметричных пространствах ([5]).

Т е о р е м а 4. *Пространство близости, мажорируемое вполне ограниченным пространством, вполне ограничено.*

Т е о р е м а 5. *Для любого пространства близости P существует пространство $P!$ — его поправление — грубейшее правильное пространство, мажорирующее P; оператор поправления является корефлективным функтором.*

Т е о р е м а 6. *Для любых двух равномерных пространств $X = (X, u)$, $Y = (X, v)$ верхняя грань их близостей и близость их верхней грани совпадают с точностью до поправления.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $\psi(X \vee Y) > \psi X \vee \psi Y = P$, и поэтому $(\psi(X \vee Y))! > P!$ Наоборот, $P! > \psi X, \psi Y$, а потому равномерные пространства $X \vee (P!)_p = X_p'$ и $Y \vee (P!)_p = Y'$ совместимы с пространством близости $P!$, мажорируя в то же время соответственно X и Y (и будучи грубейшими такими пространствами). Следовательно, $\psi(X \vee Y) < \psi(X' \vee Y') = P!$ ввиду правильности $P!$, а значит, и $(\psi(X \vee Y))! < P!$

Т е о р е м а 7. *Для симметричных пространств близости оператор ! совпадает с введенным в* ([5]).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пространство $P = P^\delta$ симметрично и среди его симметричных равномерностей есть наибольшая m. Пусть $U \in u \in \psi^{-1}(\delta)$, где u — вейлевская равномерность. Существует конечное число функций $P \to M_i$, подчиненных в совокупности окружению U. Все $P \to sM_i$ эквинепрерывны, а значит, ввиду правильности P, и их сочетание $P \to sM_1 \times sM_2 \times \ldots \times sM_n$. Очевидно, что $\{(x, y) \in P^2 \mid \operatorname{dist}(fx, fy) < 1\} \subset U \cap U^{-1}$; далее, $(P, m) \to M$ равномерно непрерывно и, значит, $s(u) = u \vee u^* < m$.

С л е д с т в и е. *Нижняя симметризация rP правильная, если правильно P.*

Т е о р е м а 8. *Пусть два пространства близости совпадают с точностью до поправления: $P! = Q!$. То же справедливо по отношению к их верхним симметризациям*: $(sP)! = (sQ)!$.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР

Московский инженерно-строительный институт
Москва

Поступило
14 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. А н т о н о в с к и й, В. Г. Б о л т я н с к и й, Т. А. С а р ы м с а к о в, УМН, 21, № 4 (1966). [2] М. Я. А н т о н о в с к и й, В. З. П о л я к о в, ДАН, 198, № 3 (1971). [3] М. Я. А н т о н о в с к и й, УМН, 24, № 1 (1969). [4] В. Г. Б о л т я н с к и й, ДАН, 197, № 6 (1971). [5] В. З. П о л я к о в, ДАН, 154, № 1 (1964). [6] S. A. N a i m p a l l y, B. D. W a r r a c k, Proximity Spaces, Cambridge, № 59 (1970). [7] M. K l e i b e r, W. J. P e r v i n, Bull. Austral. Math. Soc., 1 (1969). [8] W. J. P e r v i n, Am. Math. Mon., 71, 158 (1964).