

УДК 519.4 : 517 : 513.88

МАТЕМАТИКА

М. А. ВЕЛИЕВ, Я. Д. МАМЕДОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Н. Векун 10 IV 1972)

Пусть H — вещественное гильбертово пространство. Через $A_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, обозначим линейные самосопряженные операторы, области определения $D(A_i(t))$ которых не зависят от t : $D(A_i(t)) = D(A_i)$.

Пусть оператор $P(t, x)$ является потенциалом функционала $F(t, x)$:

$$(P(t, x), h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(t, x + \lambda h) - F(t, x)}{\lambda}.$$

Исследуются некоторые свойства решения уравнений

$$A_1(t)x' + A_2(t)x + P(t, x) = 0, \quad (1)$$

$$A_0(t)x'' + A_1(t)x' + A_2(t)x + P(t, x) = 0, \quad (2)$$

а также устойчивость процесса определения приближенного решения уравнений (1), (2) по методу Бубнова — Галеркина, где операторы $A_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, удовлетворяют условиям

$$(A_i(t)x, x) \geq a_i \|x\|^2, \quad x \in D(A_i^{1/2}), \quad i = 0, 1, 2,$$

причем при рассмотрении уравнения (1) предполагается, что $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, а в уравнении (2) $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 > 0$.

1. Рассмотрим уравнение (1) и соответствующее возмущенное уравнение

$$[A_1(t) + \Gamma_1(t)]y' + [A_2(t) + \Gamma_2(t)]y + P(t, y) = \delta(t, y), \quad (3)$$

где $\Gamma_i(t)$, $i = 1, 2$, — непрерывные на $[0, T]$ линейные ограниченные операторы, действующие в H ; нелинейное возмущение $\delta(t, y)$ на множестве $[0, T] \times S_0$ удовлетворяет условию

$$\|\delta(t, y)\| \leq \delta_0 K(t, r_0), \quad \delta_0 = \text{const} \geq 0,$$

где $K(t, r_0)$ — положительная непрерывная скалярная функция на $[0, T]$, а $S_0 = \{y: \|A_2^{1/2}(t)y\| \leq r_0\}$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть существует $A_2'(t)$ и выполнено условие

$$(A_2'(t)x, x) \leq b_2 (A_2(t)x, x), \quad b_2 = \text{const}, \quad x \in D(A_2^{1/2}).$$

Пусть существует $\partial F(t, x) / \partial t$ и

$$\partial F(t, x) / \partial t \leq b_2 F(t, x), \quad x \in D(F) = D(A_1^{1/2}(0)).$$

Пусть, далее, выполнено условие

$$\|\Gamma_1(t)\| + 1/2 \|\Gamma_2(t)\| \leq 1/2 \gamma_1 a_1, \quad 0 < \gamma_1 < 1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Пусть, наконец, $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0) \in D(A_2^{1/2})$.

Тогда для любых решений уравнений (1) и (3) справедливы соответствующие неравенства

$$2 \int_0^t \|A_1^{1/2}(s)x'\|^2 \exp\{b_2(t-s)\} ds + \|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t, x) \leq$$

$$\leq \{ \|A_2^{1/2}(0) x_0\|^2 + 2F(0, x_0) \} \exp \{ b_2 t \},$$

$$(1 - \gamma_1) \int_0^t \|A_1^{1/2}(s) y'\|^2 \exp \{ \tilde{\beta}(t-s) \} ds + \|A_2^{1/2}(t) y\|^2 + 2F(t, y) \leq$$

$$\leq \left\{ \|A_2^{1/2}(0) y_0\|^2 + 2F(0, y_0) + \frac{\delta_0^2}{a_1 \tilde{\beta}} \max_t K^2(t, r_0) \right\} \exp \{ \tilde{\beta} t \},$$

где $\tilde{\beta} = b_2 + a_1 / (2a_2)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть оператор $P(t, x)$ удовлетворяет условию

$$(P(t, x) - P(t, y), x - y) \geq p \|A_1^{1/2}(t)(x - y)\|^2,$$

$$t \in [0, T], \quad x, y \in S = S_1 \cap S_0, \quad S_1 = \{x : \|A_2^{1/2}(t)x\| \leq r_1\}, \quad p = \text{const.}$$

Пусть, наконец, $F(t, x) \geq 0$ и существует $A_1'(t)$, причем $(A_1'(t)x, x) \leq b_1(A_1(t)x, x)$, $b_1 = \text{const} \geq 0$, $x \in D(A_1^{1/2})$.

Тогда

$$\|A_1^{1/2}(t)[y(t) - x(t)]\|^2 \leq \{ \|A_1^{1/2}(0)(y_0 - x_0)\|^2 + C_1 \max_t \|\Gamma_1(t)\|^2 +$$

$$+ C_2 \max_t \|\Gamma_2(t)\|^2 + C_3 \delta_0^2 \} \exp \{ qt \}, \quad (4)$$

где $q = b_1 + 2\gamma_1 - 2p$, $C_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$.

Следствие. Из оценки (4) следует, что при достаточно малых $\max_t \|\Gamma_i(t)\|^2$, $i = 1, 2$, δ_0 , $\|A_1^{1/2}(0)(y_0 - x_0)\|$ достаточно мало $\|A_1^{1/2}(t)[y(t) - x(t)]\|$, следовательно, достаточно малы нормы $\|y(t) - x(t)\|$, т. е. если решение уравнения (3) существует, то решение уравнения (1) устойчиво относительно малых изменений коэффициентов, правых частей и начальных данных (4).

2. Рассмотрим теперь уравнение (2) и возмущенное уравнение

$$[A_0(t) + \Gamma_0(t)]y'' + [A_1(t) + \Gamma_1(t)]y' + [A_2(t) + \Gamma_2(t)]y + P(t, y) =$$

$$= \delta(t, y), \quad (5)$$

где $\Gamma_i(t)$, $i = 0, 1, 2$, — линейные, непрерывные на $[0, T]$, ограниченные операторы; нелинейное возмущение $\delta(t, y)$ на множестве $[0, T] \times S_2$, $S_2 = \{y : \|A_2^{1/2}(t)y\| \leq r_2\}$ удовлетворяет условию

$$\|\delta(t, y)\| \leq \delta_2 K_2(t, r_2), \quad \delta_2 = \text{const} \geq 0,$$

где $K_2(t, r_2)$ — положительная скалярная функция из $L_2[0, T]$.

Теорема 3. Пусть существуют $A_i'(t)$, $i = 0, 2$, и

$$(A_i'(t)x, x) \leq b(A_i(t)x, x), \quad b = \text{const} \geq 0, \quad x \in D(A_i^{1/2}).$$

Пусть существует $\partial F(t, x) / \partial t$ и

$$\partial F(t, x) / \partial t \leq bF(t, x), \quad x \in D(F) = D(A_2^{1/2}).$$

Пусть, далее, оператор $A_1(t)$ неотрицателен. Пусть, наконец, существует $\Gamma_0'(t)$ и выполнены условия

$$(\Gamma_0'(t)x, x) \leq 0,$$

$$\|\Gamma_0(t)\| + 2\|\Gamma_1(t)\| + \|\Gamma_2(t)\| \leq \nu a_0, \quad 0 < \nu < 1.$$

Тогда, если $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0) \in D(A_2^{1/2}(0))$, $x_1 = x'(0)$, $y_1 = y'(0) \in D(A_0^{1/2}(0))$, то для любых решений уравнений (2) и (5) имеют место оценки

$$\|A_0^{1/2}(t)x'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)x\|^2 + 2F(t, x) \leq$$

$$\leq [\|A_0^{1/2}(0)x_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)x_0\|^2 + 2F(0, x_0)] \exp \{ bT \},$$

$$\|A_0^{1/2}(t)y'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)y\|^2 + 2F(t, y) \leq \frac{1}{1-\nu} \left[\|A_0^{1/2}(0)y_1\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)y_0\|^2 + \right. \\ \left. + 2F(0, y_0) + (\Gamma_0(0)y_1, y_1) + \delta_2^2 \int_0^T K_2^2(s, r_2) ds \right] \exp \left\{ \frac{b_3}{1-\nu} t \right\},$$

где b_3 — положительная постоянная.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Пусть на топологическом произведении $[0, T] \times S_2 \cap S_3$, $S_3 = \{x : \|A_2^{1/2}(t)x\| \leq r_3\}$, оператор $P(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\|P(t, y) - P(t, x)\| \leq p \|A_2^{1/2}(t)(y - x)\|, \quad p = \text{const} > 0.$$

Пусть, далее, $F(t, x) \geq 0$.

Тогда имеет место оценка для $z(t) = y(t) - x(t)$:

$$\|A_0^{1/2}(t)z'\|^2 + \|A_2^{1/2}(t)z\|^2 \leq \frac{1}{1-\nu} \left[(1+\nu) \|A_0^{1/2}(0)z'(0)\|^2 + \|A_2^{1/2}(0)z(0)\|^2 + \right. \\ + C_4 \|A_0^{-1/2}(t)[\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)]A_0^{-1/2}(t)\|_{B_2(H; [0, T])}^2 + \\ + \frac{c_4}{a_0} \|\Gamma_2(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)\|_{B_2(H; [0, T])}^2 + \\ + \frac{1}{a_0} (pC_4 + \max_t \|P(t, 0)\|^2) \|\Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)\|_{B_2(H; [0, T])}^2 + \\ \left. + \frac{\delta_2^2}{a_0} \int_0^T K_2^2(s, r_2) ds \right] \exp \left\{ \frac{b_4}{1-\nu} t \right\}, \quad (6)$$

где C_4, b_4 — положительные постоянные.

Если существует решение (5) и достаточно малы величины $\|A_0^{1/2}(0)z'(0)\|$, $\|A_2^{1/2}(0)z(0)\|$, $\|A_0^{-1/2}(t)[\Gamma_1(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_1(t)] \cdot A_0^{-1/2}(t)\|_{B_2(H; [0, T])}$, $\|\Gamma_2(t) - \Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)A_2(t)\|_{B_2(H; [0, T])}$, $\|\Gamma_0(t)A_0^{-1}(t)\|_{B_2(H; [0, T])}$, δ_2 , то из оценки (6) вытекает устойчивость решения уравнения (2).

3. Наконец, пользуясь результатами предыдущих пунктов, рассмотрим вопрос устойчивости метода Бубнова — Галеркина. Будем считать, что область определения операторов $A_i(t)$ пересекается по множеству $\mathfrak{M}$ всюду плотному одновременно во всех трех энергетических пространствах Фридрихса H_i , $i = 0, 1, 2$. Определяя скалярное произведение как

$$[x, y]_3 = \sum_{i=0}^n (A_i(t)x, y), \quad x, y \in \mathfrak{M},$$

превращаем множество $\mathfrak{M}$ в гильбертово пространство, которое обозначим через H_3 . Обозначим норму в этом пространстве через $\|x\|_3 = \left(\sum_{i=0}^2 \|x\|_{H_i}^2 \right)^{1/2}$.

Если H_3 не полное, то его можно пополнить.

Возьмем координатную систему $\{\varphi_k\}$ из H_3 и приближенное решение ищем в виде $x_n(t) = \sum_{k=1}^n c_k^{(n)}(t) \varphi_k$, где коэффициенты $c_k^{(n)}(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяются из задачи

$$R_0^{(n)}(t)C''^{(n)}(t) + R_1^{(n)}(t)C'^{(n)}(t) + R_2^{(n)}(t)C^{(n)}(t) + f_n(t, x_n) = 0, \\ C^{(n)}(0) = C_0^{(n)}, \quad C'^{(n)}(0) = C_0'^{(n)},$$

где $R_i^{(n)}(t) = \|(A_i(t)\varphi_k, \varphi_j)\|_{k,j=1}^n$, $i = 0, 1, 2$, $C^{(n)}(t) = (c_1^{(n)}(t), \dots, c_n^{(n)}(t))$, $f_n(t, x_n) = ((P_1(t, x_n), \varphi_1), \dots, (P(t, x_n), \varphi_n))$, а векторы $C_0^{(n)}, C_0'^{(n)}$

определяются из условия, что $x_n(0)$, $x_n'(0)$ являются проекциями элементов x_0 , x_1 на подпространство, натянутое на элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$.

Обозначим через $\Gamma_i^{(n)}(t)$, $i=0, 1, 2$, матрицы возмущения, а через $\delta_n(t, x_n)$ — вектор возмущения. Предположим, что вектор $\delta_n(t, x_n)$ на множестве $[0, T] \times S_1^{(n)}$, $S_1^{(n)} = \{x_n : \|A_2^{1/2}(t)x_n\| \leq \sigma\}$ удовлетворяет условию

$$\|\delta_n(t, x_n)\|_{E_n} \leq \delta K_3(t, \sigma),$$

где δ — малое положительное число, характеризующее точность вычисления вектора $f_n(t, x_n)$, $K_3(t, \sigma)$ — скалярная функция из $L_2[0, T]$, а E_n означает n -мерное евклидово пространство.

Обозначим через $\alpha_{ki}^{(n)}(t)$ собственные значения матриц $R_i^{(n)}(t)$, $i=0, 1, 2$. Пусть $A_0(t) \equiv 0$. Тогда условие $x'(0) = x_1$ не ставится. Если $H_2 \subseteq H_1$ и координатная система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ сильно минимальна в H_1 , то $\alpha_{k_1}^{(n)}(t) \geq \alpha_{11}^{(n)}(t) \geq \alpha_{01}(t) > 0$, $\alpha_{k_2}^{(n)}(t) \geq \alpha_{12}^{(n)}(t) \geq \alpha_{02}(t) > 0$, где функции $\alpha_{01}(t)$, $\alpha_{02}(t)$ не зависят от n .

Теорема 5. Пусть: 1) операторы $A_i(t)$, $i=1, 2$, $P(t, x)$ и функционал $F(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2; 2) имеет место вложение $H_2 \subseteq H_1$; 3) координатная система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ сильно минимальна в H_1 ;

4) $x_0 \in D(A_2^{1/2})$; 5) $F(0, x_0) = 0$; 6) $\sum_{i=1}^2 \frac{1}{\alpha_{0i}(t)} \|\Gamma_i^{(n)}(t)\|_{E_n} \leq \mu$, $0 < \mu < 1$,

$\forall t \in [0, T]$.

Тогда процесс определения приближенного решения задачи Коши для уравнения (1) по методу Бубнова — Галеркина устойчив на $[0, T]$.

Рассмотрим теперь устойчивость метода Бубнова — Галеркина для уравнения (2). Будем предполагать, что $a_i > 0$, $i=0, 1, 2$, имеют место соотношения $H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0$ и система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ почти ортонормирована в H_0 . Тогда $0 < \alpha_{00}(t) \leq \alpha_{k0}^{(n)}(t) \leq \bar{\alpha}_{00}(t)$ при $\forall t \in [0, T]$, где функции $\alpha_{00}(t)$, $\bar{\alpha}_{00}(t)$ не зависят от n .

Теорема 6. Пусть 1) операторы $A_i(t)$, $i=0, 2$, $P(t, x)$ и функционал $F(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 4; 2) имеют место вложения $H_2 \subseteq H_1 \subseteq H_0$; 3) координатная система $\{\varphi_k\} \subset H_2$ почти ортонормирована

в H_0 ; 4) $x_0 \in D(A_2)$, $x_1 \in D(A_0^{1/2})$; 5) $F(0, x_0) = 0$; 6) $\sum_{i=0}^2 \frac{1}{\alpha_{0i}(t)} \|\Gamma_i^{(n)}(t)\|_{E_n} \leq \mu_1$,

$0 < \mu_1 < 1$, $\forall t \in [0, T]$; 7) первая производная $\Gamma_0^{(n)}(t)$ неположительна.

Тогда процесс определения приближенного решения задачи Коши для уравнения (2) по методу Бубнова — Галеркина устойчив на $[0, T]$.

Следствие. Из теорем 5, 6 сразу вытекает устойчивость процесса определения коэффициентов $c_k^{(n)}(t)$, $k=1, 2, \dots, n$.

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Г. Михлиш, Численная реализация вариационных методов, М., 1966.
² Я. Д. Мамедов, ДАН, 161, № 5 (1965). ³ Я. Д. Мамедов, ДАН, 158, № 1 (1964). ⁴ М. А. Велиев, ДАН, 157, № 1 (1964). ⁵ М. А. Велиев, Сибирск. Матем. журн., 9, № 4 (1968). ⁶ М. А. Велиев, Дифференциальные уравнения, 5, № 3 (1969). ⁷ М. И. Вишик, Матем. сборн., 39, № 1 (1956).