Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 536.25

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ

О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖИДКОСТИ БИНГАМА

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 17 IV 1972)

Свободная тепловая конвекция вязко-пластической среды Бингама практически не изучена. Имеется работа ([1]), в которой решена задача о конвективном вязко-пластическом течении между вертикальными плоскостями, нагретыми до разной температуры. В ([2]) рассмотрено влияние магнитного поля на конвективное течение проводящей среды. Вопрос о конвективной устойчивости, насколько нам известно, ранее не рассматривался. В данной работе обсуждается устойчивость вертикального слоя бингамовской жидкости, подогреваемой снизу. Простая геометрия области позволяет получить точное решение задачи.

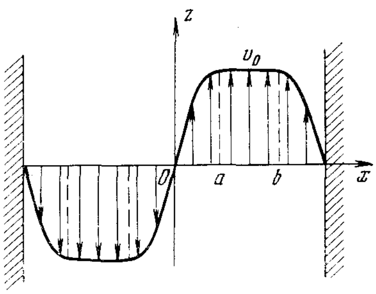

Рис. 1

1. Рассмотрим вертикальный канал, образованный бесконечными параллельными плоскостями $x = \pm h$, заполненный жидкостью Бингама. Жидкость подогревается снизу; в состоянии равновесия в ней имеется постоянный вертикальный градиент температуры A. При определенных условиях, наряду с равновесием, возможно также и стационарное движение среды, которое будем предполагать плоскопараллельным. В этом режиме отлична от нуля только вертикальная компонента скорости v_z; распределения скорости, температуры и давления имеют следующую структуру:

$$v_z = v(x), \quad T = -Az + \theta(x), \quad p = p(z) \tag{1}$$

(расположение осей координат см. на рис. 1).

В основном стационарном движении, соответствующем нижнему уровню неустойчивости, продольный градиент давления равен нулю, а профили скорости и температуры находятся из уравнений движения и теплопроводности (штрих означает дифференцирование по x)

$$\frac{1}{\rho}\tau' + g\beta\theta = 0, \quad \chi\theta'' = -Av, \tag{2}$$

где ρ — средняя плотность, g — ускорение силы тяжести, χ и β — коэффициенты температуропроводности и теплового расширения, а τ — касательное напряжение, связанное с градиентом скорости реологическим уравнением

$$\tau = \tau_0 \operatorname{sign} v' + \mu v'; \tag{3}$$

τ_0 — предельное напряжение сдвига, μ — коэффициент вязкости; эти величины предполагаются не зависящими от температуры.

Введем безразмерные переменные, приняв в качестве единиц расстояния, скорости, температуры и напряжения соответственно h, χ / h, Ah, $\mu\chi / h^2$. Тогда получим безразмерные уравнения задачи

$$\tau' + \mathrm{R}\theta = 0, \quad \theta'' = -v, \quad \tau = B \operatorname{sign} v' + v', \tag{4}$$

где $\mathrm{R} = \rho g \beta A h^4 / (\mu\chi)$ — число Рэлея, $B = \tau_0 h^2 (\mu\chi)$ — безразмерный параметр пластичности.

Граничные условия и условие замкнутости течения запишутся следующим образом:

$$v(\pm 1) = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0, \quad \int_{-1}^{1} v\,dx = 0. \tag{5}$$

Требуется найти нетривиальное решение нелинейной задачи (4), (5).

2. Основное стационарное движение схематически изображено на рис. 1. Ввиду нечетности профилей скорости и температуры достаточно рассмотреть решение в области $0 \leqslant x \leqslant 1$. Здесь можно выделить зоны вязкого течения $0 \leqslant x \leqslant a$ и $b \leqslant x \leqslant 1$, где $\tau = \pm B + v'$, и пластическую зону $a < x < b$, в которой $v = v_0 = \mathrm{const}$, $-B \leqslant \tau \leqslant B$. На каждом из трех участков можно записать общие решения уравнений (4). Граничные условия вместе с условиями непрерывности скорости, напряжения, температуры и поперечного теплового потока в точках a и b, а также условия $\tau(a) = B$, $\tau(b) = -B$, определяющие границы пластической зоны, приводят к системе уравнений для нахождения всех постоянных интегрирования и параметров a, b и v_0.

Анализ этой системы показывает, что решение существует лишь при условии $a = 1 - b$ (границы пластической зоны симметричны относительно точки $x = {}^1/_2$). Параметры a и v_0 определяются из соотношений

$$r(1 - 2a)(\operatorname{tg} ra - \operatorname{th} ra) = 4, \tag{6}$$

$$v_0 = 24Br^{-3}(1 - 2a)^{-2}[r(1 - 2a) + 3(\operatorname{tg} ra + \operatorname{th} ra)]^{-1}; \tag{7}$$

здесь $r = R^{1/4}$. Таким образом, при фиксированных значениях R и B из (6) и (7) находятся a и v_0.

Зависимость $a(r)$ представлена на рис. 2. На рис. 3 изображена зависимость максимальной скорости v_0 от числа Рэлея. В предельных случаях $r \gtrsim \pi$ и $r \to \infty$ из (6) и (7) следуют асимптотические формулы

$$\begin{gathered} a \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}(r - \pi) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{\pi}{2}\right)(r - \pi)^2 + \ldots, \\ v_0 \approx \frac{B}{\pi(r - \pi)}, \quad r \gtrsim \pi; \\ a \approx (6/R)^{1/3}, \quad v_0 = 24B/\mathrm{R}, \quad r \to \infty. \end{gathered} \tag{8}$$

3. Приступая к обсуждению результатов, напомним сначала, что в случае ньютоновской жидкости ($B = 0$), кроме тривиального решения, соответствующего равновесию, имеется еще нетривиальное стационарное решение при $\mathrm{R} = \pi^4$, причем его амплитуда является, в силу линейности задачи, неопределенной. Критическое значение $\mathrm{R} = \pi^4$ в то же время служит границей устойчивости равновесия: при $\mathrm{R} < \pi^4$ равновесие устойчиво, а при $\mathrm{R} > \pi^4$ неустойчиво относительно малых возмущений.

В случае среды Бингама при всех R также возможно равновесие. Кроме того, как видно из приведенных результатов, в области $\mathrm{R} > \pi^4$ имеется стационарное решение определенной амплитуды v_0. Нетрудно убедиться в том, что это стационарное состояние неустойчиво относительно малых плоскопараллельных возмущений. В самом деле, вводя малые возмущения скорости и температуры u и ϑ, зависящие от времени по закону $\exp(\lambda t)$, получим амплитудную краевую задачу

$$\lambda u = u'' + \mathrm{R}\vartheta, \quad \lambda \mathrm{P}\vartheta = u + \vartheta'', \quad u(\pm 1) = \vartheta(\pm 1) = 0 \tag{9}$$

($\mathrm{P} = \mu / (\rho\chi)$ — число Прандтля). Эта задача совпадает с задачей для возмущений равновесия обычной ньютоновской жидкости. Ее решение известно: при $\mathrm{R} > \pi^4$ имеется по крайней мере одна неустойчивая мода, соответствующая положительному вещественному инкременту λ.

Таким образом, найденное стационарное движение с амплитудой v_0 неустойчиво: линия $v_0(\mathrm{R})$ на рис. 3 является «седловой». Что касается равновесия, то в случае бингамовской жидкости оно, очевидно, устойчиво по отношению к малым возмущениям при всех R. Это достаточно ясно из физических соображений: среде Бингама соответствует бесконечная начальная вязкость; возникающие в такой среде малые возмущения равновесия

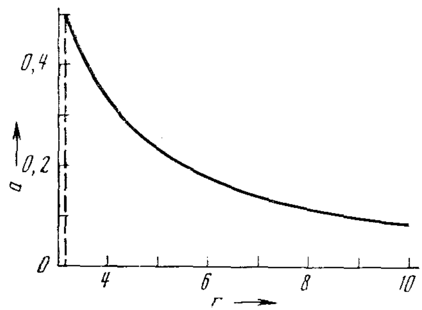

Рис. 2

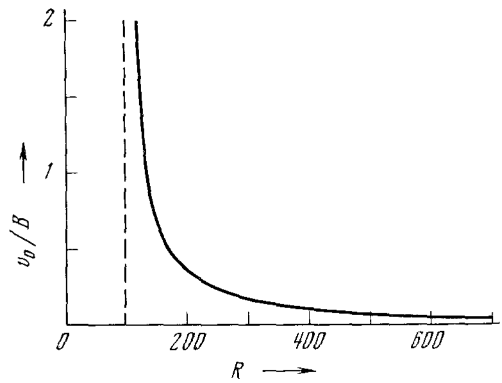

Рис. 3

всегда затухают. Развиваться могут лишь возмущения с достаточно большой начальной амплитудой («жесткое» возбуждение).

Итак, в среде Бингама, как и в случае ньютоновской жидкости, критическим значением числа Рэлея остается $\mathrm{R} = \pi^4$. Однако, в отличие от ньютоновской жидкости, при $\mathrm{R} > \pi^4$ неустойчивость равновесия возникает лишь под действием конечных возмущений скорости. Если амплитуда возмущения меньше v_0, определяемого формулой (7), то это возмущение затухает; если же начальная амплитуда превосходит v_0, то такое возмущение неограниченно нарастает. С увеличением R пороговое значение амплитуды v_0 уменьшается. В пределе при $B \to 0$ имеем $v_0 \to 0$, и мы приходим к известному результату о неустойчивости равновесия ньютоновской жидкости относительно малых возмущений при $\mathrm{R} > \pi^4$.

В заключение заметим, что найденное стационарное движение с амплитудой v_0, несмотря на его неустойчивость, по-видимому, может быть реализовано в эксперименте. В опытах по наблюдению конвекции в вертикальных каналах, подогреваемых снизу, обычно (см. ([3])) поддерживается конечный тепловой поток, определяемый мощностью нагревателя. В случае бингамовской жидкости этот продольный поток нормирует амплитуду v_0, и при этом должно возникать движение с соответствующим градиентом температуры.

Пермский государственный университет
им. А. М. Горького
Пермский государственный педагогический
институт

Поступило
14 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W.-J. Yang, H.-C. Yeh, Trans. ASME, C87, № 2 (1965). [2] R. Palabazzer, AIAA J., 4, № 11, 2064 (1966). [3] Г. А. Остроумов, Свободная конвекция в условиях внутренней задачи, М.— Л., 1952.