

А. П. КОМБАРОВ

О ПРОИЗВЕДЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ. РАВНОМЕРНОСТИ НА Σ -ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

(Представлено академиком Н. С. Александровым 1 II 1972)

1. Топологическое произведение метрического пространства и нормального счетнокомпактного пространства нормально⁽¹⁾.

Теорема 1.1. *Произведение секвенциального паракомпакта и нормального счетнокомпактного пространства коллективно нормально.*

Напомним, что пространство называется секвенциальным, если всякое его подмножество, содержащее предел любой сходящейся последовательности своих элементов, замкнуто. Поскольку всякое метрическое пространство, очевидно, секвенциально, вышеприведенное утверждение А. Стоупа является следствием нашей теоремы.

Лемма 1. *Пусть X — секвенциальное пространство, а пространство Y счетнокомпактно.*

Тогда проекция $p: X \times Y \rightarrow X$ является замкнутым отображением.

Доказательство. Для произвольного открытого множества $U \subseteq X \times Y$ положим $S = \{x \in X: p^{-1}(x) \subseteq U\}$ и $F = X \setminus S$. Если F не замкнуто, то некоторая последовательность $\{x_n \in F: n = 1, 2, \dots\}$ сходится к точке $x \in S$. Для каждого n выберем $y_n \in Y$ так, чтобы точка (x_n, y_n) не лежала в U . Пусть $R_m = \{y_n: n \geq m\}$. Счетная система замкнутых множеств $\{[R_m]: m = 1, 2, \dots\}$, очевидно, центрирована, поэтому найдется $y \in \bigcap \{[R_m]: m = 1, 2, \dots\}$. Нетрудно убедиться, что (x, y) будет предельной точкой для множества $\{(x_n, y_n): n = 1, 2, \dots\}$, но это противоречит выбору y_n , $n = 1, 2, \dots$. Итак, F — замкнутое множество и, следовательно, S открыто в X . Очевидно, $p^{-1}(S) \subseteq U$, поэтому отображение p замкнуто.

Система множеств $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$ разделяется в открытом множестве U , если найдется дизъюнктивная система открытых множеств $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$ такая, что при любом $\alpha \in A$ выполняется включение $F_\alpha \cap U \subseteq U_\alpha$ ⁽²⁾.

Лемма 2. *Пусть система замкнутых множеств $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$ дискретна в произведении $X \times Y$, где Y — коллективно нормальное пространство. Пусть p — проекция $X \times Y$ на X , а точка $x \in X$ произвольна.*

Тогда существует окрестность U полного прообраза $p^{-1}(x)$, в которой система $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$ разделяется.

Доказательство. Обозначим через π проекцию произведения $X \times Y$ на Y и для каждого $\alpha \in A$ определим замкнутое множество $\Phi_\alpha = \pi(F_\alpha \cap p^{-1}(x))$. Дискретная система $\{\Phi_\alpha: \alpha \in A\}$ разделяется в Y . Пусть $\{H_\alpha: H_\alpha \supseteq \Phi_\alpha, \alpha \in A\}$ — дизъюнктивная система открытых множеств. $U_\alpha = \pi^{-1}(H_\alpha) \setminus (\bigcup \{F_\beta: \beta \in A, \beta \neq \alpha\})$ и $U = (\bigcup \{U_\alpha: \alpha \in A\}) \cup (X \times Y \setminus (\bigcup \{F_\alpha: \alpha \in A\}))$. Легко проверяется, что все множества U_α , $\alpha \in A$, открыты в $X \times Y$ и попарно не пересекаются. Далее, $F_\alpha \cap U \subseteq U_\alpha$ при всех $\alpha \in A$, а открытое множество U содержит $p^{-1}(x)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть X — секвенциальный паракомпакт, пространство Y нормально и счетнокомпактно (следовательно, коллективно нормально), а система замкнутых множеств $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$ дискретна в произведении $X \times Y$. В силу леммы 1 проекция $p: X \times Y \rightarrow X$ — замкнутое отображение, а так как для произвольной точки $x \in X$

полный прообраз $p^{-1}(x)$ содержится в некотором открытом множестве $U \subseteq X \times Y$, в котором система разделяется (лемма 2), откуда следует, что паракомпакт X покрывается открытыми множествами, в полных прообразах которых система $\{F_\alpha: \alpha \in A\}$ разделяется. Завершает доказательство лемма 1 из (3).

Пространство называется сильно счетнокомпактным, если замыкание любого счетного подмножества является бикомпактом * (4).

Теорема 1.2. *Произведение паракомпакта счетной тесноты ** и нормального сильно счетнокомпактного пространства коллективно нормально.*

Достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть теснота пространства X счетна, а пространство Y сильно счетнокомпактно.*

Тогда проекция $p: X \times Y \rightarrow X$ является замкнутым отображением.

Доказательство. Пусть U открыто в $X \times Y$, и $S = \{x \in X: p^{-1}(x) \subseteq U\}$. Убедимся, что S открыто. Действительно, если это не так, то найдется точка $x \in S$, которая лежит в замыкании некоторого счетного множества $\{x_n \in X \setminus S: n = 1, 2, \dots\}$. Для каждого n возьмем $y_n \in Y$ так, чтобы точка (x_n, y_n) не лежала в U . Зафиксируем базу окрестностей точки x : $\sigma = \{V_\xi: \xi \in \Xi\}$. Для любого $\xi \in \Xi$ определим счетное множество $R_\xi = \{y_n: x_n \in V_\xi\}$. Бикомпакты $[R_\xi]$, $\xi \in \Xi$, образуют централизованную систему. Пусть $y \in \bigcap \{[R_\xi]: \xi \in \Xi\}$. Окрестности $V_{\xi_0} \in \sigma$ и H точек x и y соответственно таковы, что $V_{\xi_0} \times H \subseteq U$. Найдется $y_{n_0} \in R_{\xi_0} \cap H$. Легко видеть, что $(x_{n_0}, y_{n_0}) \in U$. Полученное противоречие доказывает лемму.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $x \in \beta N \setminus N$ (N — счетное дискретное пространство), $X = N \cup \{x\}$ и $Y = \beta N \setminus \{x\}$. Тогда теснота X , очевидно, счетна; пространство Y счетнокомпактно, а проекция произведения $X \times Y$ на X не является замкнутым отображением.

З а м е ч а н и е 2. Произведение бикомпакта и нормального сильно счетнокомпактного пространства Фреше — Урысона (следовательно, секвенциального) может не быть нормальным пространством ((5), стр. 178; (3); (6), теорема 2.4). Заметим также, что произведение паракомпакта с точечно-счетной базой и сепарабельного метрического пространства не обязательно нормально (7).

Пусть $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Напомним, что пространство называется $\mathfrak{m}$ -компактным (инициально компактным вплоть до мощности $\mathfrak{m}$) ((8), стр. 35), если любое его открытое покрытие мощности $\leq \mathfrak{m}$ содержит конечное покрытие. Далее, назовем пространство сильно $\mathfrak{m}$ -компактным, если замыкание любого его подмножества мощности $\leq \mathfrak{m}$ бикомпактно. $\mathfrak{m}$ -Секвенциальные пространства — это в точности факторные образы пространств, характер которых в каждой точке не превосходит $\mathfrak{m}$ (9).

Лемма 4. *Пусть X — $\mathfrak{m}$ -секвенциальное пространство, а пространство Y $\mathfrak{m}$ -компактно.*

Тогда проекция $p: X \times Y \rightarrow X$ является замкнутым отображением.

С л е д с т в и е (S. Hanai, (10)). *Если характер пространства X в каждой точке не превосходит $\mathfrak{m}$, а пространство Y $\mathfrak{m}$ -компактно, то проекция произведения $X \times Y$ на X замкнута.*

Теорема 1.3. *Произведение $\mathfrak{m}$ -секвенциального паракомпакта и нормального $\mathfrak{m}$ -компактного пространства коллективно нормально.*

Лемма 5. *Пусть теснота пространства X не превосходит $\mathfrak{m}$, а пространство Y сильно $\mathfrak{m}$ -компактно.*

Тогда проекция $p: X \times Y \rightarrow X$ является замкнутым отображением.

* Можно показать, что всякое линейно упорядоченное счетнокомпактное пространство сильно счетнокомпактно. Σ -произведение бикомпактов — другой пример сильно счетнокомпактного пространства.

** Напомним, что теснота пространства не превосходит кардинального числа $\mathfrak{m}$, если в этом пространстве всякое множество, содержащее замыкание любого своего подмножества мощности $\leq \mathfrak{m}$, замкнуто. Теснота всякого секвенциального пространства, очевидно, счетна.

Теорема 1.4. *Произведение паракомпакта, теснота которого не превосходит $\aleph_1$, и нормального сильно $\aleph_1$ -компактного пространства коллективно нормально.*

2. Теснота конечного произведения бикомпактов счетной тесноты счетна (¹¹). Отсюда сразу же следует, что теснота счетного произведения пространств точечно-счетного типа и счетной тесноты счетна. Как известно, полные в смысле Чеха пространства являются пространствами точечно-счетного типа, поэтому теорему 1 из (³) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.1. *Σ -произведение полных (в смысле Чеха) паракомпактов, теснота каждого из которых счетна, коллективно нормально.*

Следствие 1. *Σ -Произведение полных паракомпактов, являющихся пространствами Фреше — Урысона, коллективно нормально.*

Следствие 2. *Σ -Произведение наследственно сепарабельных полных финально компактных пространств коллективно нормально.*

Замечание 3. Легким следствием теорем 1.2 и 2.1 является следующее

Утверждение. *Σ -Произведение перистых паракомпактов счетной тесноты коллективно нормально, если только все сомножители, за исключением, быть может, счетного числа, бикомпактны.*

Пространство * называется псевдопаракомпактным, если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие такое, что сумма любых двух пересекающихся его элементов содержится в некотором элементе исходного покрытия (¹², ¹³). Пространство почти псевдопаракомпактно, если в каждое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие так, что любые две точки, лежащие в объединении пересекающихся элементов вписанного покрытия, содержатся в некотором одном элементе исходного покрытия (¹⁴, ¹⁵). Пространство X почти псевдопаракомпактно в том и только в том случае, когда семейство всех окрестностей диагонали $\Delta \subset X \times X$ является равномерностью на X (¹⁴, ¹⁵). Всякое почти псевдопаракомпактное пространство коллективно нормально (¹⁴). Σ -Произведение, не совпадающее с произведением пространств, не может быть псевдопаракомпактным пространством (и тем более не паракомпактно). Доказательство следующей теоремы аналогично (³), стр. 790, но использует факторизационную теорему Р. Энгелькина ((¹⁶), стр. 224), а также теорему 2.1.

Теорема 2.2. *Σ -Произведение полных финально компактных пространств, теснота каждого из которых счетна, почти псевдопаракомпактно.*

Следствие (²). *Σ -Произведение полных сепарабельных метрических пространств почти псевдопаракомпактно.*

В заключение выражаю глубокую благодарность В. И. Пономареву за внимание к работе.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. H. Stone, Bull. Am. Math. Soc., 54, 977 (1948). ² H. H. Corson, Am. J. Math., 81, 785 (1959). ³ А. П. Комбаров, ДАН, 199, 526 (1971). ⁴ J. Keesling, Proc. Am. Math. Soc. 24, 760 (1970). ⁵ Дж. Л. Келли, Общая топология, М., 1968. ⁶ N. Noble, Trans. Am. Math. Soc., 149, 187 (1970). ⁷ E. Michael, Bull. Am. Math. Soc., 69, 375 (1963). ⁸ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ⁹ P. R. Meyer, Coll. Math., 22, 223 (1971). ¹⁰ S. Hanai, Proc. Japan Acad., 37, 298 (1961). ¹¹ В. И. Малыгин, ДАН, 203, № 5 (1972). ¹² A. I. Goldman, Summer Institute on Set Theoretic Topology (Summary of Lectures and Seminars) Madison (Wis.), 1955, p. 107. ¹³ В. Л. Ключин, Вестн. Московск. ун-в., № 4, 54 (1966). ¹⁴ H. J. Cohen, C. R., 234, 290 (1952). ¹⁵ M. J. Mansfield, Trans. Am. Math. Soc., 86, 489 (1957). ¹⁶ R. Engelking, Fund. Math., 59, 221 (1966).

* Рассматриваются T_1 -пространства.