

В. И. ЗУБОВ

ПОСТРОЕНИЕ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 2 VII 1971)

В настоящей заметке указываются необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования, а также дается конструкция оптимальных управлений.

Пусть заданы две управляемые системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями вида

$$\dot{x}_i = P_i x_i + Q_i u_i + F_i, \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

где x_i — вектор фазового состояния i -й системы, имеющий размерность n_i , u_i — вектор управлений, имеющий размерность r_i .

Будем считать, что элементы матриц P_i , Q_i , а также векторов F_i заданы при $t \geq 0$, вещественны, непрерывны и ограничены.

Обозначим через $x_i^0 = x_i$ при $t = 0$ начальное состояние и через $x_i(T) = x_i$ при $t = T$ — конечное состояние управляемых систем (1). Будем считать, что компоненты векторов u_i являются функциями времени с суммируемым квадратом на промежутке преследования $[0, T]$.

Определение 1. Будем говорить, что задача преследования при движении из начальных состояний x_1^0, x_2^0 разрешима на промежутке $[0, T]$, если при любом выборе управления u_2 существует управление u_1 такое, что будут выполнены условия

$$H_1 x_1 = H_2 x_2 \quad \text{при} \quad t = T, \quad (2)$$

где H_1 и H_2 — некоторые постоянные матрицы, размерности $s \times n_i$, s — число строк, n_i — число столбцов.

Определение 2. Будем говорить, что задача преследования разрешима из любого начального состояния x_1^0 , если при любом выборе управления u_2 найдется управление u_1 такое, что имеет место (2).

Пусть Y_i — фундаментальная система решений для линейной системы

$$\dot{x}_i = P_i x_i. \quad (3)$$

$Y_i = E_i$ при $t = 0$, где E_i — единичные матрицы. Положим $A_i(0, T) = \int_0^T B_i B_i^* dt$, где $B_i = Y_i^{-1} Q_i$. Положим

$$\xi_i = Y_i(T) \cdot \left[x_i^0 + \int_0^T Y_i^{-1} F_i dt \right].$$

Теорема 1. Для того чтобы задача преследования из начального состояния x_1^0, x_2^0 была разрешима на промежутке $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы столбцы матрицы $H_2 Y_2(T) A_2(0, T)$ и вектор $(H_1 \xi_1 - H_2 \xi_2)$ располагались в линейном подпространстве, натянутом на векторы, образующие столбцы матрицы $H_1 Y_1(T) A_1(0, T)$.

З а м е ч а н и е. Не ограничивая общности, можно считать, что ранг матриц H_i совпадает с s .

Теорема 2. Для того чтобы задача преследования была разрешима из любого начального положения x_1^0 на промежутке $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $H_1 Y_1(T) A_1(0, T)$ совпадал с s .

Введем в рассмотрение функцию $L = L(x_1(T), x_2(T))$. Поставим вопрос об отыскании оптимальных стратегий u_i^0 , осуществляющих решение задачи преследования и удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned} L(x_1(T, u_1^0), x_2(T, u_2^0)) &= \min_{u_1} \max_{u_2} L(x_1(T, u_1), x_2(T, u_2)) = \\ &= \max_{u_2} \min_{u_1} L(x_1(T, u_1), x_2(T, u_2)), \end{aligned}$$

где $x_i = x_i(t, u_i)$ есть решение системы (1) с начальным условием x_i^0 и управлением $u_i = u_i(t)$.

Теорема 3. Если функция $\Phi(z_1, z_2) = L(\xi + Y(T) \cdot A_1(0, T) z_1; \xi_2 + Y_2(T) \cdot A_2(0, T) \cdot z_2)$ имеет седловую точку z_1^0, z_2^0 на линейном многообразии

$$H_1 \xi_1 + H_1 Y_1(T) A_1(0, T) z_1 = H_2 \xi_2 + H_2 Y_2(T) A_2(0, T) z_2,$$

так что $\Phi(z_1^0, z_2) \leq \Phi(z_1^0, z_2^0) \leq \Phi(z_1, z_2^0)$, то оптимальные стратегии u_i^0 существуют и могут быть представлены в форме:

$$u_i^0 = B_i^* z_i^0 + v_i, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где B_i^* — как и выше, матрица, транспонированная по отношению к B_i , векторы v_i имеют суммируемые с квадратом компоненты и удовлетворяют условию

$$\int_0^T B_i v_i dt = 0$$

и в остальном произвольны.

З а м е ч а н и е. Теорема 3 дает конструкцию программных управлений, являющихся оптимальными стратегиями. Если с помощью этих стратегий рассчитать центр преследования

$$x_1(T) = \xi_1 + Y_1(T) \cdot A_1(0, T) \cdot z_1^0,$$

то можно построить в ряде случаев также синтезированное управление, линейное относительно x_1 .

Теорема 4. Если выполнено условие теоремы 3 и столбцы матрицы B_1^* линейно независимы на любом интервале $[t, T]$, где $t \in [0, T]$, то можно указать вариант оптимальной стратегии в синтезированном виде

$$u_1^0 = M x_1 + N, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} M &= -B_1^* A_1^{-1}(t, T) Y_1^{-1}(t), \\ N &= B_1^* A_1^{-1}(t, T) \cdot \left[Y_1(T) X_1(T) - \int_t^T Y_1^{-1}(\tau) F_1(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Поступило
10 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Н. Н. Красовский, Теория управления движением, 1969. ² В. И. Зубов, Аналитическая динамика гироскопических систем, 1970.