

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, Н. И. НАГНИБИДА

О ПОЛНОТЕ И БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Через A_R обозначим пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$, $0 < R \leq \infty$, функций с топологией компактной сходимости.

Пусть последовательность всех целых неотрицательных чисел разбита на две части $\{v_n\}$ и $\{\mu_n\}$ так, что $v_s \neq \mu_k$, $s, k = 0, 1, \dots$, и каждое число принадлежит только одной из последовательностей $\{v_n\}$ и $\{\mu_n\}$. Рассмотрим теперь систему

$$\{z^{\mu_n}\} \cup \{z^{v_n} F^{(v_n)}(z)\}, \quad (1)$$

где $F(z) \in A_R$, полнота которой в A_R изучалась ранее в ⁽¹⁾. Из известных результатов, касающихся проблемы о двух точках ⁽²⁾, в этой заметке мы получим некоторые новые (по сравнению с ⁽¹⁾) критерии полноты в A_R системы (1). Для одной специальной системы вида (1) удастся получить также условия, при которых она образует в A_R квазистепенной базис ⁽³⁾.

1. Предположим, что некоторый линейный непрерывный функционал аннулируется на всех функциях системы (1). Следовательно ⁽⁴⁾, существует такая последовательность комплексных чисел $\{\gamma_s\}_{s=0}^{\infty}$, для которой $\lim_{s \rightarrow \infty} (|\gamma_s|)^{1/s} = l < R$, что

$$\gamma_{\mu_n} = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

и

$$\sum_{k=v_n}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \cdot \frac{k!}{(k-v_n)!} \gamma_k = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (3)$$

(Учитывая (2), суммирование в (3) следует вести только по тем значениям k , $k \geq v_n$, которые не совпадают ни с одним из μ_s).

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} \gamma_k z^k.$$

Так как $\overline{\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{F^{(k)}(0)}{k!} |\gamma_k| \right)^{1/k}} \leq \frac{l}{R} < 1$, то $\varphi(z) \in A_r$, где $r > 1$. Кроме того, соотношения (2) и (3) равносильны, очевидно, тому, что

$$\varphi^{(\mu_n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(v_n)}(1) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

Как известно, система (1) полна в A_R тогда и только тогда, когда из (2) и (3) следует, что $\gamma_s = 0$, $s = 0, 1, \dots$. Поэтому, как видно из (3), если система (1) полна в A_R , то необходимо

$$F^{(v_n)}(0) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Условие (5) является, очевидно, и достаточным в том случае, когда множество $\{v_n\}$ конечно.

Предполагая всюду в дальнейшем множество $\{v_n\}$ бесконечным, мы должны заключить, что верна

Лемма. Если проблема (4) о двух точках имеет лишь тривиальное решение (т. е. $f(z) \equiv 0$), то при выполнении условия (5) система (1) полна в A_R .

Отсюда, учитывая результаты работы (2) (см. также (5)), мы получаем следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $F(z) \in A_R$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_s = \lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{v_s!}{\prod_{k=1}^s (v_k - v_{k-1})!} \right)^{1/v_s} = \sigma \leq 1$$

и выполнено условие (5).

Тогда система (1) полна в A_R .

Теорема 2. Пусть $F(z)$ — целая функция, выполнено условие (5) и $\lim_{s \rightarrow \infty} \sigma_s = \infty$, а $\lambda_s = \min_{k \geq s} \sigma_k$.

Тогда в случае

$$\frac{F^{(v_k)}(0)}{(v_k - 1)!} \leq \frac{\delta_k}{(R\lambda_k)^{v_k}} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k < +\infty$$

система (1) полна в любом A_R .

Теорема 3. Если $F(z)$ — целая функция порядка ρ , выполнено условие (5) и $\max(1, \rho) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln v_n}{\ln \sigma_n} < \infty$, то система (1) полна в любом A_R и $R \leq 1$.

2. Пусть $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(pn)}(0)}{(pn)!} z^{pn} \in A_R$, $R < \infty$, и $v_n = pn$, где p — фиксированное натуральное число. Найдем теперь условия, при которых соответствующая система (1) образует в A_R квазистепенной базис. Другими словами (см. (3)), нас интересуют условия, при которых оператор T , определяемый соотношениями

$$Tz^k = z^k, \quad k \neq pn, \quad (6)$$

$$Tz^{pn} = z^{pn} F^{(pn)}(z), \quad k, n = 0, 1, \dots,$$

может быть линейно и непрерывно расширен (см. (3, 6, 7)) до изоморфизма A_R на себя.

Поскольку матрица $[t_{i,k}]_{i,k=0}^{\infty}$ оператора T в степенном базисе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ пространства A_R имеет нижнетреугольный вид, то в случае существования непрерывного оператора T^{-1} необходимо должно быть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|F^{(pn)}(0)|)^{1/pn} = 1. \quad (7)$$

Предполагая, наоборот, условие (7) выполненным и определив изоморфизм T_1 пространства A_R соотношением

$$T_1 f(z) = T_1 \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^i = \sum_{i \neq ps} f_i z^i + \sum_{n=0}^{\infty} f_{pn} F^{(pn)}(0) z^{pn},$$

мы, очевидно, получим

$$Tf(z) = T_1 \left(\sum_{i \neq ps} f_i z^i + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{pk}}{(pk)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} f_{pn} z^{pn} \right)$$

($f(z)$ — произвольная функция из A_R). Поэтому, если функция $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{pk}}{(pk)!}$ не имеет в круге $|z| < R$ нулей, то оператор T имеет непрерывный обратный $T^{-1} = T_2 T_1^{-1}$, где

$$T_2 f(z) = \sum_{i \neq ps} f_i z^i + \frac{1}{\psi(z)} \sum_{n=0}^{\infty} f_{pn} z^{pn}.$$

Следовательно, верна

Теорема 4. Если $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{pk}}{(pk)!}$ не имеет в круге $|z| < R$ нулей, то система

$$\{z^k\} \cup \{z^{pn} F^{(pn)}(z)\}, \quad k \neq pn; \quad k, n = 0, 1, \dots,$$

где $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(pk)}(0)}{(pk)!} z^{pk}$, образует в A_R квазистепенной базис тогда и только тогда, когда

$$F^{(pn)}(0) \neq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (|F^{(pn)}(0)|)^{1/pn} = 1.$$

3. Аналогично тому, как это сделано выше, мы легко убеждаемся также в справедливости следующих утверждений.

Теорема 5. Если $F(z) \in A_R$, то система

$$\{z^{pn}\} \cup \left\{ \sum_{k=pn}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k \right\}$$

полна в A_R в том и только том случае, когда $F^{(pn)}(0) \neq 0, n = 0, 1, \dots$

Теорема 6. Пусть $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(pk)}(0)}{(pk)!} z^{pk} \in A_R$ и $R < \infty$. Система

$$\{z^k\} \cup \left\{ \sum_{s=n}^{\infty} \frac{F^{(ps)}(0)}{(ps)!} z^{ps} \right\}, \quad k \neq pn; \quad k, n = 0, 1, \dots,$$

образует в A_R квазистепенной базис тогда и только тогда, когда $R \leq 1$, $F^{(ps)}(0) \neq 0, s = 0, 1, \dots$, и $\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{|F^{(ps)}(0)|}{(ps)!} \right)^{1/ps} = 1$.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку
Черновицкий государственный
университет

Поступило
7 VII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Ибрагимов, И. С. Аршон, ДАН, 197, № 5 (1971). ² А. О. Гельфонд, И. И. Ибрагимов, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 547 (1947). ³ М. Г. Хапланов, ДАН, 80, № 2, 177 (1951). ⁴ А. И. Маркушевич, Матем. сборн., 17 (59), № 2, 211 (1945). ⁵ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, М., 1971. ⁶ М. Г. Хапланов, ДАН, 80, № 1, 21 (1951). ⁷ К. М. Фишман, ДАН, 127, № 1, 40 (1959).