Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 6 (117), 2019

Краткие сообщения

УДК 512.548

Косые элементы в полиадических группах специального вида

А.М. Гальмак[1], Ю.И. Кулаженко[2], М.В. Селькин[3]

Основным результатом сообщения является теорема, позволяющая для каждого элемента l-арной группы специального вида указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n-арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.
Ключевые слова: n-арный группоид, n-арная группа, косой элемент.

The main result of the article is the theorem in which any skew element of l-ary group of a special kind is specified by the elements of n-ary group, l-ary group of a special kind being defined on Cartesian power of the given n-ary group.
Keywords: n-ary groupoid, n-ary group, skew element.

Введение. Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η следующим образом.

Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})),$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots$$
$$\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))).$$

При $s = 1$ n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$.

Частными случаями полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A, а также две полиадические операции Э. Поста [3], одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Обе операции Э. Поста являются частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

В [1] доказано, что если n-арная операция η ассоциативна, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Основной результат. Напомним определения некоторых используемых в работе понятий.

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией $\eta: A^n \to A$ называют [4] *n-арной полугруппой*, если операция η *ассоциативна*, то есть в A для любого $i = 1, 2, ..., n-1$ выполняется тождество ассоциативности

$$\eta(\eta(a_1 \ldots a_n)a_{n+1} \ldots a_{2n-1}) = \eta(a_1 \ldots a_i\eta(a_{i+1} \ldots a_{i+n})a_{i+n+1} \ldots a_{2n-1}).$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией η: $A^n \to A$ называют *n-арной квазигруппой*, если для всех $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n, b \in A$ в A однозначно разрешимо уравнение

$$\eta(a_1 \ldots a_{i-1} x a_{i+1} \ldots a_n) = b.$$

Универсальную алгебру $< A, \eta >$ с одной n-арной ($n \geq 2$) операцией η: $A^n \to A$ называют *n-арной группой* [5], если она является и n-арной полугруппой и n-арной квазигруппой.

Ясно, что полугруппы (квазигруппы, группы) – это n-арные полугруппы (n-арные квазигруппы, n-арные группы) при $n = 2$.

В [1] доказано, что если n-арная операция η является ассоциативной, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной, то есть, если $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа. Для полиадических групп аналогичный результат получен в [6]: *если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная группа.*

l-арную группу $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ естественно называть l-арной группой специального вида.

Согласно В. Дёрнте [5], элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1} b \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a, то употребляют обозначение $b = \bar{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1}\ \bar{a}\ \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Можно показать, что для того, чтобы элемент b *n-арной группы* $< A, \eta >$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$.

Выше отмечалось, что, если $< A, \eta >$ – n-арная группа, то в случае тождественности подстановки σ^{l-1} универсальная алгебра $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является l-арной группой. В связи с этим результатом возникает задача нахождения косых элементов в l-арной группе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$. Следующая теорема полностью решает эту задачу, так как позволяет для каждого элемента этой l-арной группы указать его косой элемент, выразив его через косые элементы n-арной группы $< A, \eta >$.

Теорема 1. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* ($n \geq 3$), *подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}),\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(1)}}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(k)}})).$$

Для $n = 2$ результат, аналогичный теореме 1, доказан в [7].

Следующее следствие получается из теоремы 1, если в ней положить $n = 3$.

Следствие 1. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$ ($s \geq 1$). *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ ($2s + 1$)*-арной группы* $< A^k, \eta_{2s+1,\sigma,k} >$ *элемент*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(1)}}\ \ldots\ \overline{a_{\sigma(1)}}), \ldots, \eta(\overline{a_{\sigma^{2s-1}(k)}}\ \ldots\ \overline{a_{\sigma(k)}}))$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Полагая в следствии 1 $s = 1$ и формально считая, что $\eta(a) = a$ для любого $a \in A$, получим

Следствие 2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* σ *удовлетворяет условию* $\sigma^3 = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *тернарной группы* $< A^k, \eta_{1, \sigma, k} >$ *элемент*

$$\bar{\mathbf{a}} = (\overline{a_{\sigma(1)}}, \ldots, \overline{a_{\sigma(k)}})$$

является косым для $\mathbf{a}$.

Литература

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Гальмак, А.М. Об операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

4. Русаков, С.А. Алгебраические *n*-арные системы / С.А. Русаков. – Мн. : Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

5. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

6. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

7. Гальмак, А.М. Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Мн. : Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

[1]Могилёвский государственный
университет продовольствия

[2]Белорусский государственный
университет транспорта

[3]Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 12.09.2019