

УДК 517.537

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛНОТЫ СИСТЕМ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ *

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — целая функция, $\{\varphi_k(z)\}$ — последовательность функций из совокупности $A(|z| \leq k)$, $\{a_k\}$ — последовательность комплексных чисел и функция $F(z, u)$ определяется рядом

$$F(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z) u^k. \quad (1)$$

Предположим, что функции $f(z)$ и $F(z, u)$ удовлетворяют условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{|z| \leq R} \left| \frac{\varphi_n(z)}{a_n} \right| \right)^{1/n} = \sigma_0 (< +\infty). \quad (2)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\gamma(u, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(z)}{a_k} \frac{1}{u^{k+1}}. \quad (3)$$

Заметим, что ряд (3) сходится равномерно в области $|u| \geq r_1 > \sigma_0$ при любом z из круга $|z| \leq R$ и, кроме того, $|\gamma(u, z)| \leq M$ при $|u| \geq r_1$ и $|z| \leq R$. Очевидно, для функции $\Phi(\xi)$, регулярной в круге $|\xi| \leq r_1$, $r_1 > \sigma_0$, имеет смысл оператор

$$L[\Phi] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(\xi, z) \Phi(\xi) d\xi, \quad |z| \leq R.$$

Благодаря свойствам линейного оператора $L[\Phi]$, можно убедиться в том, что для функции $f(z)$ из класса $A(|z| \leq \sigma_0 R_1)$ или $A(|z| < \infty)$ при $|u| \leq R_1$ имеют место представления

$$F(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1 (> \sigma_0)} \gamma(\xi, z) f(u\xi) d\xi, \quad |u| \leq R_1, \quad |z| \leq \sigma_0 R_1. \quad (4)$$

Рассмотрим случай, когда $f(z)$ — целая функция. Аналогично рассматривается случай, когда $f(z) \in A(|z| \leq \sigma_0 R_1)$.

Введем обозначения

$$P_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} A_{n,k} F(z, a_k), \quad Q_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} A_{n,k} f(a_k z).$$

Пользуясь представлением (4), можно показать, что

$$P_{n+p}(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(\xi, z) [Q_{n+p}(\xi) - Q_n(\xi)] d\xi.$$

Отсюда легко выводится следующее утверждение.

* Со всеми определениями и обозначениями, используемыми в этой заметке, можно ознакомиться подробно в главе IV нашей книги (1).

Теорема 1. Пусть $f(z) \in A(|z| < \infty)$, $\varphi_k(z) \in A(|z| \leq R)$, $k = 1, 2, \dots$, $\{\alpha_k\}$ — последовательность комплексных чисел, функция $F(z, u)$ определяется рядом (1), равномерно сходящимся по z в круге $|z| < R$ при любом u , и выполняется условие (2), в котором $\sigma_0 < r_1 < R$.

Если последовательность линейных агрегатов $\{Q_n(z)\}$ равномерно сходится внутри круга $|z| < R$, то внутри того же круга равномерно сходится и последовательность линейных агрегатов $\{P_n(z)\}$.

Далее, займемся сравнением областей полноты систем аналитических функций $\{f(\alpha_n z)\}$ и $\{F(z, \alpha_n)\}$ при дополнительном предположении, что система функций $\{\varphi_n(z)\}$ из класса $A(|z| \leq R)$ полна в круге $|z| < R$.

Очевидно, при $\sigma_0 < r < r_1 < R$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(\xi, z) (a_m \xi^m) d\xi = \varphi_m(z). \quad (5)$$

Пользуясь представлением (4) и равенством (5), находим

$$\varphi_m(z) - P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(z, \xi) [a_m \xi^m - Q_n(\xi)] d\xi, \\ m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, несложным рассуждением выводится следующая

Теорема 2. Пусть функции $f(z)$ и $F(z, u)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и система функций $\{\varphi_n(z)\}$, аналитических в круге $|z| < R$, полна в том же круге $|z| < R$.

Если система $\{f(\alpha_n z)\}$ полна в круге $|z| < R$, то в этом же круге будет полна и система $\{F(z, \alpha_n)\}$.

Рассмотрим далее последовательность линейных агрегатов вида

$$R_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} A_{n,k} z^k f^{(k)}(\alpha_k z), \quad H_n(z) = \sum_{k=1}^{p_n} A_{n,k} \left(\frac{\partial^k F(z, u)}{\partial u^k} \right)_{u=\alpha_k}.$$

Из справедливости равенства

$$H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(\xi, z) R_n(\xi) d\xi, \quad r < r_1 < R_1, \quad (6)$$

следует, что

$$H_{n+p}(z) - H_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r_1} \gamma(\xi, z) [R_{n+p}(\xi) - R_n(\xi)] d\xi.$$

Отсюда легко выводится справедливость утверждения:

Теорема 3. Пусть функции $f(z)$ и $F(z, u)$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и $\{\alpha_k\}$ — последовательность комплексных чисел. Если последовательность линейных агрегатов $\{R_n(z)\}$ равномерно сходится внутри круга $|z| < R$, то при условии (2), где $\sigma_0 < R$, внутри того же круга будет равномерно сходиться и последовательность линейных агрегатов $\{H_n(z)\}$.

Наконец, относительно областей полноты систем функции $\{z^n f^{(n)}(\alpha_n z)\}$ и $\{[\partial^n F(z, u) / \partial u^n]_{u=\alpha_n}\}$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Предположим, что функции $f(z)$ и $F(z, u)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1 и система функций $\{\varphi_n(z)\}$, аналитических в круге $|z| \leq R$, полна в том же круге. Если система аналитических функций $\{z^n f^{(n)}(\alpha_n z)\}$ полна в пространстве $A(|z| < R)$, то в том же пространстве полна и система аналитических функций $\{[\partial^n F(z, u) / \partial u^n]_{u=\alpha_n}\}$.

Доказательство. Из равенства (5) и (6) при $r < r_1 < R$ легко получается неравенство

$$|\varphi_m(z) - H_n(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=r_1} |\gamma(\xi, z)| \cdot |a_m \xi^m - R_n(\xi)| \cdot |d\xi|, \quad (7)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Кроме того, согласно условию теоремы, функции $a_m \xi^m$, $a_m \neq 0$, $m = 0, 1, \dots$, на окружности $|\xi| = r_1 < R$ можно представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности $\{R_{n,m}(z)\}$ вида $R_n(\xi)$. Благодаря этому, из неравенства (7) выводим, что на окружности $|z| = r$ равномерно по z имеем

$$\varphi_m(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n,m}(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

что имеет место и при $|z| \leq r$. Отсюда и из того, что система $\{\varphi_m(z)\}$ полна в круге $|z| < R$, следует утверждение нашей теоремы.

З а м е ч а н и е. Благодаря теоремам 2 и 4, путем подбора систем функций $\{\varphi_n(z)\}$ можно построить различные системы аналитических функций вида $\{F(z, a_n)\}$ и $\{[\partial^n F(z, u) / \partial u^n]_{u=a_n}\}$, полнота которых связана с полнотой соответственно более простых и изученных систем аналитических функций вида $\{f(a_n z)\}$ и $\{z^n f^{(n)}(a_n z)\}$.

А. Ф. Леонтьев ⁽²⁾, предполагая $f(z)$ и $\varphi(z)$ целыми функциями, рассмотрел вопрос о полноте одной из систем $\{f(a_n z)\}$ и $\{\varphi(a_n z)\}$ в зависимости от другой.

Покажем некоторые применения теоремы 4.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, из класса $A(|z| < R)$ и $\omega(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < R$, причем $\max_{|z| \leq R} |\omega(z)| \leq \sigma_0 < R$.

Полагая $\varphi_n(z) = a_n [\omega(z)]^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеем $F(z, u) = f[u\omega(z)]$. Имея в виду, что система аналитических функций $\{z^n f^{(n)}(z)\}$ полна в круге $|z| < R$, приходим к следующему заключению.

С л е д с т в и е 1. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z| < R$ с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами, $\omega(z)$ — аналитическая функция в том же круге $|z| < R$ и $|\omega(z)| \leq \sigma_0 < R$.

Тогда система аналитических функций $\{[\omega(z)]^n f^{(n)}(\omega(z))\}$ полна в круге $|z| < R$.

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ являются целыми функциями

одинакового порядка и типа с отличными от нуля тейлоровскими коэффициентами. Полагая $\varphi_k(z) = b_k z^k$, $k = 0, 1, \dots$, приходим к заключению.

С л е д с т в и е 2. Системы функций $\{z^n f^{(n)}(a_n z)\}$ и $\{z_n \varphi^{(n)}(a_n z)\}$ являются одновременно полными или неполными в одной и той же области при условии, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{b_n}{a_n} \right| \right)^{1/n} < 1.$$

Это утверждение доказано Ч. Агамалиевым ⁽³⁾.

В заключение отметим, что аналогичным способом можно получить ряд следствий из каждой сформулированной выше теоремы.

Институт математики и механики
Академии наук СССР
Баку

Поступило
28 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ И. И. Ибрагимов, Методы интерполяции функций и некоторые их применения, «Наука», 1971, стр. 1. ² А. Ф. Леонтьев, Матем. сборн., 31 (72), 381 (1952). ³ Ч. Агамалиев, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 2 (1968).