Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

М. Г. ЛЮБАРСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРИИ ФАВАРА НА СЛУЧАЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ПО ЛЕВИТАНУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 III 1972)

Рассмотрим систему n линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$x_t' + A(t)x = f(t). \tag{1}$$

Говорят, что уравнение (1) удовлетворяет условию разделенности, если всякое нетривиальное ограниченное решение однородного уравнения

$$x_t' + A(t)x = 0 \tag{2}$$

отдельно от нуля: $\inf\limits_{t\in R^1} \|x(t)\| > 0$.

Б. М. Левитан ([1]) установил следующую теорему в предположении, что матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ являются почти-периодическими функциями Г. Бора.

Теорема 1. *Если уравнение* (1) *имеет ограниченное решение и удовлетворяет условию разделенности, то оно имеет ограниченное почти-периодическое по Левитану* (L.*п.п.*) *решение.*

Если предположить, что матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ суть ограниченные L. п.п. функции, то утверждение теоремы остается в силе. Оказывается, что в этом случае каждое L.п.п. решение уравнения (1) ограничено. Поэтому доказательство теоремы 1, данное Левитаном, без изменения переносится на этот случай. По этой же причине условие существования ограниченного решения уравнения (1) продолжает оставаться необходимым.

По-иному обстоит дело, если не предполагать ограниченности матрицы $A(t)$ и функции $f(t)$. В этом случае L.п.п. решение уравнения (1) может быть неограниченным, как показывает следующий простой пример.

Неограниченная L.п.п. функция

$$x(t) = \frac{1}{2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t}}$$

является решением уравнения

$$x_t' = \frac{e^{it} + \sqrt{2}e^{i\sqrt{2}t}}{i(2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2}t})^2}.$$

Условие существования ограниченного решения уравнения (1) перестает быть необходимым. Доказательство Б. М. Левитана существенно опирается на это условие. Поэтому его нельзя использовать для решения вопроса о существовании неограниченных L.п.п. решений уравнения (1). В настоящей заметке мы установим достаточные условия того, чтобы уравнение (1) с неограниченной матрицей $A(t)$ и правой частью $f(t)$ имело L.п.п. решение. Это решение может оказаться неограниченным.

Определение 1. Множество $H \subset R^1$ называется **относительно** (**δ-относительно**) **плотным**, если существует такое положительное число l, что пересечение множества H с любым интервалом длины l не пусто (содержит интервал длины δ).

Определение 2. Назовем функцию $x(t)\colon R^1 \to R^n$ относительно (δ-относительно) ограниченной, если существует относительно (δ-относительно) плотное множество H такое, что

$$\sup_{h\in H}\|x(h)\| < +\infty.$$

Нетрудно показать, что любая L.п.п. функция является δ-относительно ограниченной. Более того, *каковы бы ни были L.п.п. функция $f(t)$ и δ-относительно плотное множество H, существует δ-относительно плотное множество $H_1 \subset H$, на котором функция $f(t)$ ограничена.*

Определение 3. Назовем функцию $x(t)\colon R^1 \to R^n$ относительно отделенной от нуля, если существует относительно плотное множество H такое, что

$$\inf_{h\in H}\|x(h)\| > 0.$$

Если каждое нетривиальное относительно ограниченное решение однородного уравнения (2) является относительно отделенной от нуля функцией, то будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию относительной разделенности.

Теорема 2. *Если уравнение* (1) *имеет относительно ограниченные решения и удовлетворяет условию относительной разделенности, то оно имеет L.п.п. решение.*

Доказательство этой теоремы основано на методе минимакса, предложенном Фаваром (2). Кроме того, оно опирается на ряд лемм, выясняющих свойства относительно ограниченных и относительно отделенных от нуля решений дифференциальных уравнений (1) и (2). Для формулировки этих лемм введем в рассмотрение наименьший числовой модуль M, содержащий модули, отвечающие L.п.п. функциям $A(t)$ и $f(t)$. На вещественной оси можно ввести новую топологию Ω_M, задаваемую связанной с операцией сложения метрикой, так что сходимость последовательности чисел в этой топологии совпадает со сходимостью на модуле M. Подобные топологии называют боровскими компактификациями оси, так как они превращают вещественную ось в предкомпактную группу. Боровские компактификации оси связаны с L.п.п. функциями следующим замечательным образом.

Класс L.п.п. функций с модулем, принадлежащим модулю M, совпадает с классом непрерывных в топологии Ω_M функций.

Этот фундаментальный факт был установлен при некоторых ограничениях В. А. Марченко (3) и независимо в полном объеме Б. Я. Левиным (4).

Лемма 1. *Если решение уравнения* (1) *или* (2) *относительно ограничено, то оно локально ограничено в топологии Ω_M.*

В частности, отсюда следует, что *всякое относительно ограниченное решение уравнения* (1) *или* (2) *является δ-относительно ограниченным.*

Лемма 2. *Если решение $x(t)$ однородного уравнения* (2) *относительно отделено от нуля, то оно локально отделено от нуля в топологии Ω_M, т. е. у каждой точки $t \in R^1$ существует окрестность из топологии Ω_M, в которой функция $x(t)$ отделена от нуля.*

Лемма 3. *Если уравнение* (1) *удовлетворяет условию относительной разделенности, то в топологии Ω_M существует окрестность, в которой все относительно ограниченные решения однородного уравнения* (2), *кроме тривиального, отделены от нуля.*

Если предположить, что матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ являются почти-периодическими функциями Г. Бора, то теорема 2 переходит в теорему 1. Действительно, нетрудно показать, что если матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ суть ограниченные функции Левитана, в частности почти-периодические функции Г. Бора, то любое относительно ограниченное решение уравнения (1) или (2) ограничено на оси, а любое относительно отделенное от нуля решение уравнения (2) отдельно от нуля на всей оси.

Теорема 2 позволяет сравнительно просто доказать следующую теорему типа Боля — Бора.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$Lx = x_t^{(m)} + A_1(t)\, x_t^{(m-1)} + \ldots + A_m(t)\, x, \tag{3}$$

действующий в пространстве m раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$: $R^1 \to R^n$. Матрицы-коэффициенты этого оператора будем считать L.п.п. функциями.

Определение 4. Будем говорить, что дифференциальный оператор (3) есть оператор Боля — Бора, если какова бы ни была L.п.п. функция $f(t)$: $R^1 \to R^n$, каждое δ-относительно ограниченное решение уравнения

$$Lx = f \tag{4}$$

является L.п.п. функцией.

Теорема 3. *Дифференциальный оператор* (3) *является оператором Боля — Бора тогда и только тогда, когда каждое δ-относительно ограниченное решение однородного уравнения*

$$Lx = 0 \tag{5}$$

является L.п.п. функцией.

Кратко наметим доказательство теоремы 3. При $m = 1$ уравнение (4) удовлетворяет условию относительной разделенности. Действительно, каждое относительно ограниченное решение однородного уравнения (5) является в силу леммы 1 δ-относительно ограниченным. По условию теоремы 3 оно представляет собой L.п.п. функцию и, следовательно, относительно отделено от нуля.

Таким образом, мы находимся в условиях применения теоремы 2. Поэтому, если δ-относительно ограниченные решения уравнения (4) существуют, то они все являются L.п.п. функциями. Теорема 3 доказана для операторов первого порядка ($m = 1$).

Для того чтобы распространить теорему 3 на случай операторов произвольно высокого порядка ($m \geqslant 2$), введем новые неизвестные

$$x_k = x_t^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

и получим дифференциальный оператор первого порядка $\tilde{L}$, действующий в пространстве непрерывно дифференцируемых функций $\tilde{x}(t) = \{x_0, x_1, \ldots \ldots, x_{m-1}\}$: $R^1 \to R^{m\cdot n}$.

Воспользуемся следующими двумя леммами, которые, на наш взгляд, представляют самостоятельный интерес.

Лемма 4. *Решение уравнения* (4) *или* (5) *может быть L.п.п. функцией только вместе со своими производными до порядка m включительно.*

Лемма 5*. *Решение уравнения* (4) *или* (5) *может быть δ-относительно ограниченным только вместе со своими производными до порядка m включительно.*

Лемма 4 показывает, что оператор $\tilde{L}$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и поэтому является оператором Боля — Бора. Из леммы 5 теперь вытекает, что оператор (3) также является оператором Боля — Бора.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность Б. Я. Левину за постоянный интерес к работе и полезные обсуждения.

Физико-технический институт
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
22 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Зап. Харьковск. матем. общ., 15, № 2, 3 (1938). [2] J. Favard, Acta math., 51, 31 (1927). [3] В. А. Марченко, ДАН, 53, № 1, 7 (1946). [4] Б. Я. Левин, Укр. матем. журн., № 1, 49 (1949). [5] E. Esclangon, C. R., 160, 475 (1915).

* Лемма 5 является обобщением на случай δ-относительно ограниченных функций одной известной леммы Е. Эсклангона ([5]).