

**ВЕКТОРНЫЕ ВРАЩАЮЩИЕСЯ ГАУССОВЫ ПУЧКИ АРНО
СО СЛОЖНЫМ АСТИГМАТИЗМОМ****С.С. Гиргель***Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины***VECTOR ROTATING GAUSSIAN ARNAUD BEAMS
WITH COMPLEX ASTIGMATISM****S.S. Girgel***Francisk Skorina Gomel State University*

Аннотация. Обсуждаются физические свойства решений параболического уравнения, описывающих векторные вращающиеся параксиальные ТМ световые пучки Арно со сложным астигматизмом. Установлены возможные значения свободных параметров, при которых пучки Арно переносят конечную мощность. Найдены явные выражения, описывающие энергетические и поляризационные свойства векторных световых пучков Арно со сложным астигматизмом. Выполнено графическое моделирование и проведен соответствующий анализ эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии векторных параксиальных световых пучков Арно с однородной и неоднородной (ТМ-моды) поляризациями.

Ключевые слова: поляризация, векторные пучки, вращающиеся пучки, гауссовы пучки, сложный астигматизм, квадратичная интегрируемость, поперечные потоки энергии.

Для цитирования: Гиргель, С.С. Векторные вращающиеся гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 43–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_43. – EDN: UPGBEC

Abstract. New solutions of the parabolic equation describing vector rotating paraxial TM Arnaud beams with complex astigmatism are investigated. Permissible values of free parameters for which Arnaud beams carry finite power are established. Explicit expressions describing the energy and polarization properties of vector Arnaud beams with complex astigmatism are proposed. Graphical modeling and corresponding analysis of polarization ellipses, intensity and transverse energy fluxes of vector paraxial Arnaud beams with homogeneous and inhomogeneous (TM modes) polarization are carried out.

Keywords: polarization, vector beams, rotating beams, Gaussian beams, complex astigmatism, TM-modes, transverse energy fluxes.

For citation: Girgel, S.S. Vector rotating Gaussian Arnaud beams with complex astigmatism / S.S. Girgel // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 43–48. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_43 (in Russian). – EDN: UPGBEC

Введение

В настоящее время широко используются лазерные круговые гауссовы световые пучки, у которых пучки обладают круговой симметрией относительно оси пучка z [1]. Пучки с общим астигматизмом изучены значительно меньше [1]–[14]. Данная работа развивает направление исследований работ автора [7]–[14], где обсуждались энергетические и поляризационные свойства различных векторных световых пучков. Здесь разработанный математический формализм применяется для описания достаточно общих вращающихся векторных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом.

Предварительно кратко излагается общий формализм для описания вращающихся скалярных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом. В следующих разделах сначала обсуждаются энергетические и

поляризационные свойства вращающихся векторных гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом и однородной поляризацией по сечению пучка, затем гауссовы ТМ-моды Арно со сложным астигматизмом и неоднородно поляризованные по сечению пучка. Обсуждается влияние свободных параметров на поляризационные и энергетические свойства векторных пучков Арно со сложным астигматизмом. В заключении кратко сформулированы основные результаты работы.

1 Скалярные гауссовы световые пучки Арно со сложным астигматизмом и свойства эллиптического светового пятна

Настоящая работа является продолжением работы [13], где анализировались геометрические характеристики эллипса интенсивности скалярных гауссовых световых пучков Арно.

Сейчас мы будем обсуждать физические свойства векторных гауссовых световых пучков Арно с однородной и неоднородной поляризациями.

Скалярное параболическое уравнение $(\partial_{xx} + \partial_{yy} + 2ik\partial_z)f = 0$ описывает параксиальные световые пучки и имеет множество самых разнообразных решений. Так, согласно [2], [14], комплексная амплитуда скалярного гауссового светового пучка Арно описывается астигматическим гауссианом

$$G_A = \sqrt{\frac{q_{ox}q_{oy}}{q_xq_y}} \exp\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{r}_\perp)\right), \quad (1.1)$$

где $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ – поперечный радиус-вектор. Матрица Γ гауссиана G_A со сложным астигматизмом является комплексной и может быть представлена в форме [2]: $\Gamma = \Gamma' + i\Gamma''$. Вещественная часть матрицы Γ : $\Gamma' = \begin{pmatrix} \Gamma'_{11}; \Gamma'_{12} \\ \Gamma'_{12}; \Gamma'_{22} \end{pmatrix}$, где

$$\Gamma'_{11,22} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm \text{ch } 2\alpha \frac{\rho_1 - \rho_2}{2};$$

$$\Gamma'_{12} = -\text{sh } 2\alpha \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}.$$

Мнимая часть матрицы Γ : $\Gamma'' = \begin{pmatrix} \Gamma''_{11}; \Gamma''_{12} \\ \Gamma''_{12}; \Gamma''_{22} \end{pmatrix}$, где

$$\Gamma''_{11,22} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \pm \text{ch } 2\alpha \frac{\omega_1 - \omega_2}{2};$$

$$\Gamma''_{12} = \text{sh } 2\alpha \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}.$$

Здесь и далее применяются обозначения Арно [2]: $q_{x,y}^{-1} = \rho_{1,2} + i\omega_{1,2}$. Два комплексных параметра пучка $q_{x,y} = z - q_{ox,oy}$ включают два свободных комплексных параметра $q_{ox,oy} = q'_{ox,oy} + iq''_{ox,oy}$, $i = \sqrt{-1}$.

Значения свободных параметров q''_{ox} , q''_{oy} и угла поворота α не могут быть произвольными и должны быть ограничены. Условия квадратичной интегрируемости (КИ) гауссиана G_A и, тем самым, физической реализуемости скалярного гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом можно представить в следующей форме [14]:

$$\left\{ q''_{0x} > 0, q''_{0y} > 0, \text{sh } 2\alpha = c \frac{2\sqrt{q''_{0x}q''_{0y}}}{|q_x - q_y|}, 0 \leq c < 1 \right\}. \quad (1.2)$$

2 Векторные гауссовы световые пучки Арно с однородной поляризацией

Перейдем к обсуждению векторных гауссовых световых пучков Арно. В [13] предложен формализм для описания векторных параксиальных световых пучков с общим астигматизмом. Этот формализм применим и для векторных

пучков Арно. Отличие от [13] состоит в том, что гауссиан G_A (1.1) отличается от общего гауссиана G в [13]. Однако общие формулы из [13] применимы и для пучков Арно.

Следуя [13], можем записать, что для параксиальных векторных гауссовых пучков Арно со сложным астигматизмом и однородной поляризацией векторы электрического и магнитного полей соответственно равны

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_\perp - \mathbf{r}_\perp \mathbf{b}_\perp \cdot \mathbf{e}_z\} G_A,$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} ([\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] - [\mathbf{e}_\perp, \mathbf{b}_\perp]) G_A.$$

Здесь, для удобства, введен вектор $\mathbf{b}_\perp \equiv \Gamma \mathbf{r}_\perp$. Его компоненты $(b_x, b_y) = (\Gamma_{11}x + \Gamma_{12}y, \Gamma_{12}x + \Gamma_{22}y)$. Поляризацию пучка Арно задает нормированный $(|\mathbf{e}_\perp|^2 = 1)$ вектор поляризации $\mathbf{e}_\perp = \eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y$. Геометрические свойства эллипса поляризации электрического вектора светового пучка задаются комплексным параметром $\eta_y / \eta_x = tg(\psi' + i\psi'')$ [8], который содержит азимут ψ' главной оси эллипса поляризации относительно оси ox и эллиптичность волны $\gamma = \text{th } \psi''$.

Однородно поляризованный векторный пучок Арно со сложным астигматизмом переносит конечную мощность, как можно показать, при выполнении прежних требований (1.2).

Энергетические характеристики векторного пучка Арно с однородной поляризацией удобно выразить через вектор $\mathbf{b}_\perp$. Плотность энергии и плотности продольного потока энергии S_z электромагнитного поля пучка Арно равны соответственно

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} \left| \frac{\det Q(0)}{\det Q(z)} \right| \exp(-k \mathbf{r}_\perp \text{Im}(\mathbf{b}_\perp)), \quad S_z = \frac{c}{n} w.$$

Плотности поперечного орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии параксиального пучка соответственно равны [13]

$$\mathbf{S}_o = S_z \cdot \text{Re}(b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y),$$

$$\mathbf{S}_s = S_z \cdot \text{th } 2\psi'' \cdot \text{Im}(-b_y \mathbf{e}_x + b_x \mathbf{e}_y)$$

и удовлетворяют равенству $\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s$.

Для графического моделирования полученных результатов для наглядности мы перешли к безразмерным переменным $X = x/x_0$, $Y = y/x_0$, $Z = z/z_0$, где $x_0 > 0$, $z_0 = kx_0^2/2$ – характерные линейные размеры пучка в поперечном и продольном направлениях соответственно. Чтобы обеспечить квадратичную интегрируемость (КИ) функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Картина интенсивности однородно поляризованного светового пучка Арно со сложным

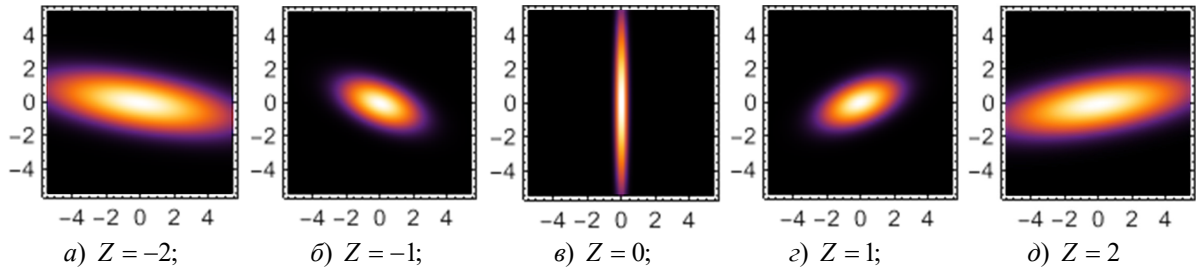


Рисунок 1.1 – Деформация и вращение эллипсов интенсивности однородно поляризованных пучков Арно со сложным астигматизмом. Свободные параметры: $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2$; $c = 0,5$

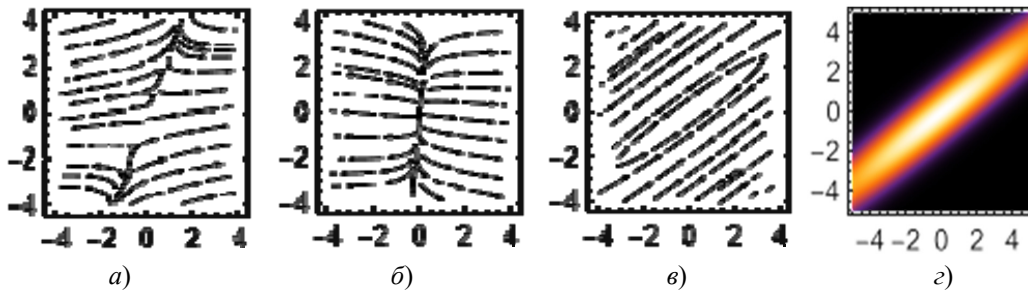


Рисунок 1.2 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии однородно поляризованных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (г). Свободные параметры: $Z = 1,8$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 0,2$; $q''_{0y} = 2,9$; $c = 0,97$

астигматизмом представляет собой световое пятно эллиптической формы (рисунки 1.1–1.2). Азимуты главных осей эллипса интенсивности светового пятна определяются формулой

$\text{tg}(2\psi) = \frac{2\Gamma''_{12}}{\Gamma''_{11} - \Gamma''_{22}}$. Параметр эллиптичности светового пятна можно вычислить, как [13]

$$\sin(2\chi) = \frac{2\sqrt{\Gamma''_{11}\Gamma''_{22} - \Gamma''_{12}^2}}{\Gamma''_{11} + \Gamma''_{22}} = \frac{2\sqrt{\Gamma''}}{\Gamma''_c}.$$

Некоторые результаты графического моделирования поперечных потоков энергии и интенсивности однородно поляризованного параксиального светового пучка Арно со сложным астигматизмом изображены в относительных единицах на рисунках 1.1–1.2 при различных значениях свободных параметров.

Для наглядности выбиралась циркулярная поляризация пучков Арно. Тем самым спиновые потоки энергии были максимальными. Вращение эллипсов интенсивности и их деформация по мере распространения в свободном пространстве однородно поляризованных пучков Арно со сложным астигматизмом аналогичны таковым для скалярных пучков Арно. Однако картины поперечных потоков энергии являются сложными и зависят от выбора ряда свободных параметров. На рисунке 1.2 видно, что картина поперечного полного потока энергии может повторять очертания эллипсов интенсивности светового пятна пучка в поперечном сечении. В то же время симметрия спинового и орбитального потоков

энергии не соответствует симметрии светового пятна пучка.

3 ТМ моды векторных гауссовых световых пучков Арно

Перейдем к обсуждению физических свойств гауссовых световых пучков Арно со сложным астигматизмом и неоднородной по сечению поляризацией. Рассмотрим ТМ-моды. Для ТМ мод векторы электрического и магнитного полей гауссового пучка Арно со сложным астигматизмом соответственно будут равны [13]

$$\mathbf{E}_{TM} = \left(\mathbf{b}_\perp + \left(\frac{i}{k} (\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) - \mathbf{b}_\perp^2 \right) \mathbf{e}_z \right) G_A;$$

$$\mathbf{H}_{TM}^{(1)} = \frac{\varepsilon}{n} [\mathbf{e}_z, \mathbf{b}_\perp] G_A.$$

Поляризация пучка определяется комплексным параметром $\frac{\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{e}_y}{\mathbf{r}_\perp \Gamma \mathbf{e}_x} = \text{tg}(\psi' + i\psi'')$. Азимут эллипсов поляризации ψ' , эллиптичность $\gamma = \text{th} \psi''$.

Условия физической реализуемости векторного пучка Арно со сложным астигматизмом и с неоднородной поляризацией, как можно показать, остаются прежние (1.2).

Плотность продольного потока энергии ТМ мод пучков Арно $S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi n} |\mathbf{b}_\perp G_A|^2$. Общая плотность поперечного потока энергии для ТМ мод равна [13]

$$\mathbf{S}_\perp = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s = \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \operatorname{Im} \left(\mathbf{b}_\perp^* \left((\Gamma_{11} + \Gamma_{22}) / k + i\mathbf{b}_\perp^2 \right) \right).$$

Согласно [13], плотности орбитального $\mathbf{S}_o$ и спинного $\mathbf{S}_s$ потоков энергии параксиального гауссового пучка Арно можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_o &= \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \frac{\Gamma_{12}^* (\Gamma_{11} - \Gamma_{22})}{k} (\mathbf{e}_x y - \mathbf{e}_y x) + i\mathbf{b}_\perp \cdot |\mathbf{b}_\perp|^2 \right\}, \\ \mathbf{S}_s &= \frac{c\varepsilon|G|^2}{8\pi n} \times \\ &\times \operatorname{Im} \left\{ \left(\frac{\Gamma_{22} (2\Gamma_{12}^* y + \Gamma_{11}^* x)}{k} - 2b_x^* b_y \operatorname{Im}(b_y) \right) \mathbf{e}_x + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\Gamma_{11} (2\Gamma_{12}^* x + \Gamma_{22}^* y)}{k} - 2b_y^* b_x \operatorname{Im}(b_x) \right) \mathbf{e}_y \right\}. \end{aligned}$$

На рисунках 3.1–3.4 показаны некоторые характерные картины поперечных потоков энергии и общих интенсивностей в относительных единицах для ТМ мод Арно со сложным астигматизмом. На всех рисунках 3.1–3.4 взят одинаковый свободный параметр $k \rightarrow 2$. Чтобы обеспечить КИ функций векторной амплитуды пучков Арно и, тем самым, переносимую конечную мощность через поперечное сечение пучка, выбирались параметры, удовлетворяющие условиям (1.2).

Для ТМ мод Арно, в отличие от пучков Арно с однородной поляризацией, в поперечном сечении пучка наблюдаются не одно, а два эллиптических пятна, которые иногда могут сливаться в эллиптическое кольцо. По мере распространения в свободном пространстве эти два пятна независимо и синхронно деформируются и вращаются (рисунок 3.1). В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главные оси эллипсов интенсивности снова вращаются на 180° градусов, при этом все время оставаясь параллельными.

Поляризация ТМ мод Арно со сложным астигматизмом является сильно неоднородной по поперечному сечению пучка и, в общем случае, эллиптической. При изменении расстояния Z от оси пучка поляризация периодически видоизменяется от линейной до круговой.

Видно, что линии орбитальных и спинных потоков энергии ориентированы самыми разнообразными способами.

Любопытно, что линии спинных потоков энергии ТМ пучков Арно часто образуют замкнутые кривые. Это соответствует общим спиралевидным энергетическим спинным потокам. Как и для однородной поляризации, на рисунках 3.3–3.5 эллипсы поперечных спинных потоков энергии по форме похожи на эллипсы интенсивности.

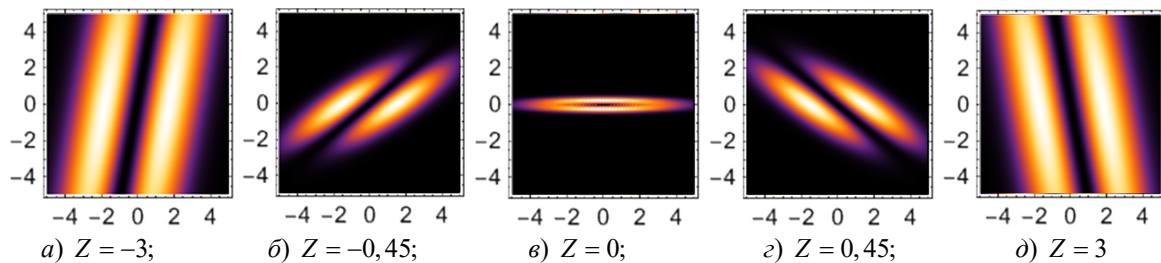


Рисунок 3.1 – Вращение картины интенсивности векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом по мере распространения в пространстве.

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 4,4$; $q''_{0y} = 0,1$; $c = 0,82$

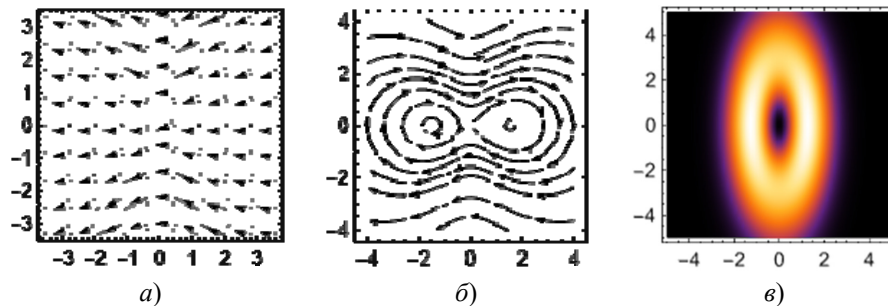


Рисунок 3.2 – Эллипсы поляризации (а), общий поперечный поток энергии (б), интенсивность векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0$; $q''_{0x} = 4,8$; $q''_{0y} = 6$; $c = 0,7$

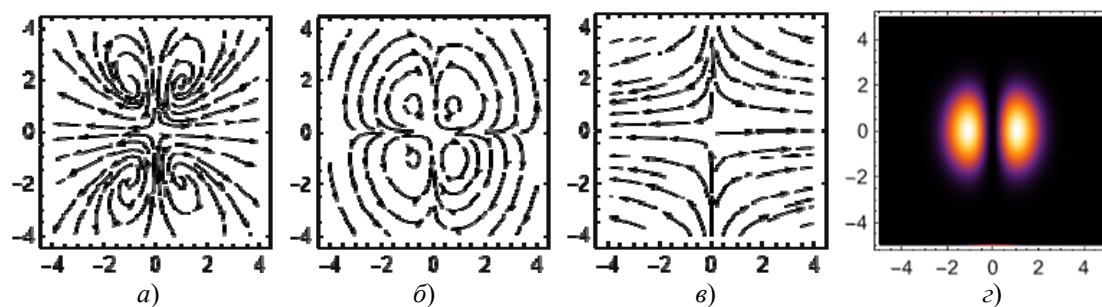


Рисунок 3.3 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0,8$; $q''_{0x} = 2$; $q''_{0y} = 4$; $c = 0$

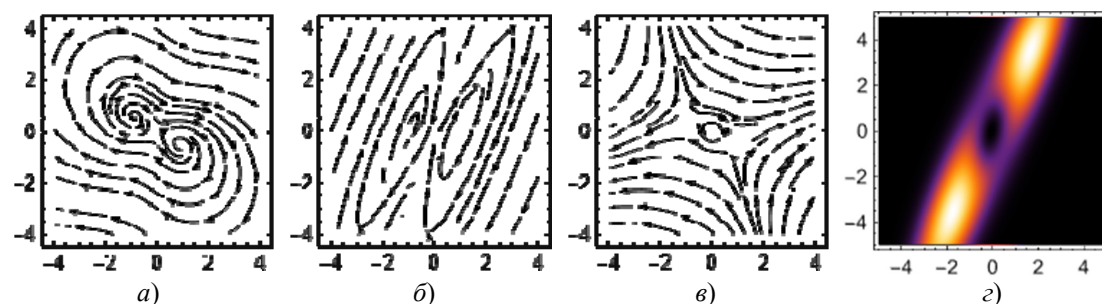


Рисунок 3.4 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0$; $q'_{0x} = -0,8$; $q'_{0y} = 0,8$; $q''_{0x} = 2$; $q''_{0y} = 4$; $c = 0,9$

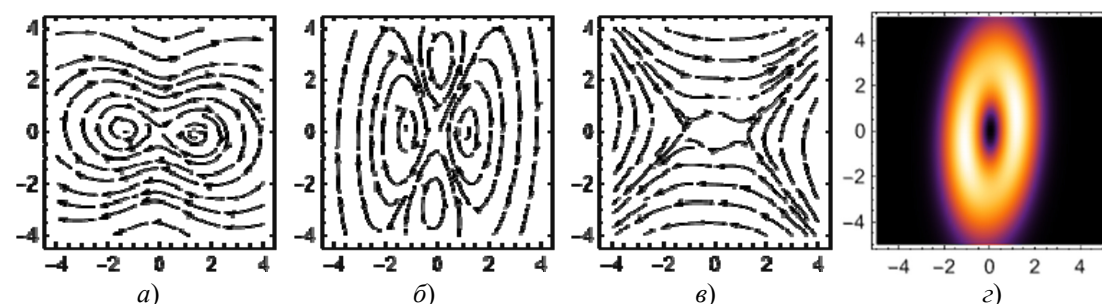


Рисунок 3.5 – Орбитальный (а), спиновый (б), общий поперечный потоки энергии векторных пучков Арно (ТМ моды) со сложным астигматизмом (в), интенсивность пучка (z).

Свободные параметры: $Z = 0,16$; $q'_{0x} = 0$; $q'_{0y} = 0,2$; $q''_{0x} = 3,5$; $q''_{0y} = 5,9$; $c = 0,67$

Отметим также важное свойство пучков Арно со сложным астигматизмом и ТМ поляризацией. При распространении их световое пятно деформируется и вращается, как и для однородно поляризованных пучков Гаусса. В интервале $(-\infty > Z > \infty)$ главная ось эллипса интенсивности снова вращается на 180° градусов.

Заключение

В данной работе представлены новые решения векторного параболического уравнения, описывающие вращающиеся параксиальные векторные пучки Арно со сложным астигматизмом и различными типами поляризации однородной и неоднородной поляризациями (ТМ-моды).

Представлены явные выражения для векторов поля, для интенсивности орбитального, спинного и общего потоков энергии пучков Арно с однородной и неоднородной поляризациями.

Проведенное графическое моделирование эллипсов поляризации, интенсивности и поперечных потоков энергии (орбитального S_o , спинного S_s и общего $S_\perp = S_o + S_s$) для обсуждаемых векторных пучков Арно подтвердило и проиллюстрировало аналитические расчеты.

Картины общей интенсивности векторных ТМ пучков Арно содержат два пика интенсивности, которые при изменении свободных параметров видоизменяются, вращаются и могут трансформироваться даже в эллиптические кольца.

Наличие нескольких свободных параметров позволяет в определенных пределах изменять физические свойства рассматриваемых пучков Арно со сложным астигматизмом. Дальнейшее их изучение откроет новые возможности использования таких пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамочкин, Е.Г.* Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 184 с.
2. *Arnaud, J.* Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // *Applied Optics*. – 1969. – Vol. 25. – P. 2908–2911.
3. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Минск: Наука и техника, 1977. – 142 с.
4. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – Москва: Наука, 1990. – 264 с.
5. *Heyman, H.* Gaussian beam and pulsed beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics / E. Heyman, L.B. Felsen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2001. – Vol. 18. – P. 1588–1611.
6. *Modeling of the general astigmatic Gaussian beam and its propagation through 3D optical systems* / E. Kochkina [et al.] // *Applied Optics*. – 2013. – Vol. 42, № 24. – P. 6030–6040.
7. *Гиргель, С.С.* Скалярные параксиальные двумерные гауссовоподобные пучки / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2010. – № 1 (2). – С. 7–11.
8. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2016. – № 1 (26). – С. 17–21.
9. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2017. – № 4 (33). – С. 7–10.
10. *Гиргель, С.С.* Энергетические характеристики векторных циркулярных пучков Куммера конечной мощности. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 1 (54). – С. 20–24.
11. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства и поперечные потоки энергии векторных бессель-гауссовых ТМ световых пучков / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2023. – № 2 (55). – С. 15–19.
12. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков с простым астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2024. – № 4 (61). – С. 19–24.
13. *Гиргель, С.С.* Энергетические и поляризационные свойства векторных гауссовых световых пучков со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2025. – № 1 (58). – С. 14–19.
14. *Гиргель, С.С.* Вращающиеся скалярные гауссовы пучки Арно со сложным астигматизмом / С.С. Гиргель // *Проблемы, физики, математики и техники*. – 2025. – № 2 (59). – С. 22–26.
15. *Bekshaev, A.* Internal flows and energy circulation in light beams / A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13 (5). – P. 053001.

Поступила в редакцию 12.12.2024.

Информация об авторах

Гиргель Сергей Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор