Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

В. Б. НЕВЗОРОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МАКСИМАЛЬНОЙ СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ СЛАГАЕМЫХ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 19 IV 1972)

Пусть $\{X_n\}$, $n=1, 2, \ldots,$ — последовательность независимых случайных величин (с.в.) с математическими ожиданиями, равными нулю, и конечными дисперсиями $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots$ Обозначим

$$B_n^2=\sum_{k=1}^n \sigma_k^2, \quad L_{n,p}=B_n^{-p}\sum_{k=1}^n E|X_k|^p, \quad p>2;$$

$$S_n=\sum_{k=1}^n X_k, \quad \bar{S}_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k;$$

$$G(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt, \quad \text{если} \quad x\geqslant 0; \quad G(x)=0, \quad \text{если} \quad x<0;$$

$$\Delta_n(x)=|\mathbf{P}\{\bar{S}_n<xB_n\}-G(x)|, \quad \Delta_n=\sup_x \Delta_n(x).$$

В ряде работ исследовалась скорость сходимости $\mathbf{P}\{\bar{S}_n<xB_n\}$ к предельному закону $G(x)$. Представляет интерес нахождение оптимальной оценки для Δ_n в терминах дроби Ляпунова $L_{n,p}$, $p>2$. Первая оценка такого рода была получена Ю. В. Прохоровым ([1]) для с.в. $X_1, X_2, \ldots$ с конечными моментами $E|X_k|^3$, $k=1, 2, \ldots,$ и имела порядок $L_{n,3}^{1/4}\log^2 L_{n,3}$. Затем для случая, когда существуют моменты $E|X_k|^p$, $p>2$, $k=1, 2, \ldots,$ были приведены оценки порядка $L_{n,p}^{1/(1+p)}$ с различными абсолютными константами ([2], [3]). Для симметричных с.в. $X_1, X_2, \ldots$ в работе ([4]) дается оценка

$$\Delta_n\leqslant CL_{n,p}^{1/p}, \quad p>2, \tag{1}$$

с абсолютной константой C. Т. В. Араком и автором для любого $p>2$ были построены примеры симметричных независимых с.в., для которых не выполняется оценка

$$\Delta_n=o(L_{n,p}^{1/p}). \tag{2}$$

Таким образом, для симметричных с.в. оценка (1) является оптимальной с точностью до абсолютной константы.

В настоящей работе удается получить оценку (1) без предположения симметричности с.в. $X_1, X_2, \ldots$ Тем самым мы установим, что для с.в. $X_1, X_2, \ldots,$ имеющих при некотором $p>2$ моменты $E|X_k|^p<\infty$, $k=1, 2, \ldots,$ оптимальной в терминах дроби Ляпунова является оценка (1).

Теорема 1. *Пусть $\{X_k\}$, $k=1, 2, \ldots,$ — последовательность независимых случайных величин, и пусть $EX_k=0$, $0<E|X_k|^p<\infty$, $k=1, 2, \ldots,$ при некотором $p<2$.*

Тогда

$$\Delta_n\leqslant CL_{n,p}^{1/p}$$

для любого натурального n, где C — абсолютная константа.

Наметим доказательство теоремы. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$X_{1,n} = \begin{cases} X_n, & \text{если } X_n \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } X_n > \varepsilon; \end{cases} \qquad X_{2,n} = \begin{cases} X_n, & \text{если } X_n \geqslant -\varepsilon, \\ 0, & \text{если } X_n < -\varepsilon; \end{cases}$$

$$X_{3,n} = \begin{cases} X_n, & \text{если } |X_n| \leqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |X_n| > \varepsilon; \end{cases}$$

$$S_{k,n} = \sum_{l=1}^{n} X_{k,l}, \quad k = 1, 2, 3, \qquad \bar{S}_{k,n} = \max_{1 \leqslant l \leqslant n} S_{k,l}, \quad k = 1, 2;$$

$$A_n = \sum_{l=1}^{n} \{|EX_{1,l}| + |EX_{2,l}|\}.$$

Лемма. *Для всех n и $l \leqslant n$ имеют место неравенства*

$$\mathbf{P}\{S_{3,n} - S_{3,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant c_0\varepsilon\} \leqslant 1/2,$$
$$\mathbf{P}\{S_{3,n} - S_{3,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant -c_0\varepsilon\} \geqslant 1/2,$$

где $c_0 = 6{,}0765$.

Доказательство этого результата можно найти в работе (3).

Далее, учитывая, что $X_{1,l} \leqslant X_{3,l} \leqslant X_{2,l}$, $l = 1, 2, \ldots$, и $\sum_{l=1}^{n} |EX_{3,l}| \leqslant A_n$, имеем для $l = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{1,n} - S_{1,l} \geqslant c_0\varepsilon + A_n\} &\leqslant \mathbf{P}\{S_{1,n} - S_{1,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant c_0\varepsilon\} \leqslant \\ &\leqslant \mathbf{P}\{S_{3,n} - S_{3,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant c_0\varepsilon\} \leqslant 1/2, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_{2,n} - S_{2,l} \geqslant -c_0\varepsilon - A_n\} &\geqslant \mathbf{P}\{S_{2,n} - S_{2,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant -c_0\varepsilon\} \geqslant \\ &\geqslant \mathbf{P}\{S_{3,n} - S_{3,l} - E(S_{3,n} - S_{3,l}) \geqslant -c_0\varepsilon\} \geqslant 1/2. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что

$$X_{1,k} \leqslant X_k \leqslant X_{2,k}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Из неравенств (4) и (5) получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geqslant x\} &\leqslant \mathbf{P}\{\bar{S}_{2,n} \geqslant x\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{2,1} < x; \ldots; S_{2,k-1} < x; S_{2,k} \geqslant x\} \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{2,1} < x; \ldots; S_{2,k-1} < x; S_{2,k} \geqslant x\} \mathbf{P}\{S_{2,n} - S_{2,k} \geqslant -c_0\varepsilon - A_n\} \leqslant \\ &\leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{2,1} < x; \ldots; S_{2,k-1} < x; S_{2,k} \geqslant x; S_{2,n} \geqslant x - c_0\varepsilon - A_n\} \leqslant \\ &\leqslant 2\mathbf{P}\{S_{2,n} \geqslant x - c_0\varepsilon - A_n\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из неравенств (3) и (5), учитывая, что $X_{1,k} \leqslant \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем для $x \geqslant 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geqslant x\} &\geqslant \mathbf{P}\{\bar{S}_{1,n} \geqslant x\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{1,1} < x; \ldots; S_{1,k-1} < x; S_{1,k} \geqslant x\} = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{1,1} < x; \ldots; S_{1,k-1} < x; x \leqslant S_{1,k} \leqslant x + \varepsilon\} \geqslant \\ &\geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{1,1} < x; \ldots; S_{1,k-1} < x; x \leqslant S_{1,k} \leqslant x + \varepsilon\} \times \\ &\times \mathbf{P}\{S_{1,n} - S_{1,k} \geqslant c_0\varepsilon + A_n\} \geqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{S_{1,1} < x; \ldots; S_{1,k-1} < x; \\ &x \leqslant S_{1,k} \leqslant x + \varepsilon; S_{1,n} \geqslant x + \varepsilon + A_n + c_0\varepsilon\} = 2\mathbf{P}\{S_{1,n} \geqslant x + \varepsilon + A_n + c_0\varepsilon\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Получили, что для любого $\varepsilon > 0$ и $x \geqslant 0$

$$2\mathbf{P}\{S_{1,\,n} \geqslant x + \varepsilon + A_n + c_0\varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}\{\bar{S}_n \geqslant x\} \leqslant 2\mathbf{P}\{S_{2,\,n} \geqslant x - c_0\varepsilon - A_n\}. \quad (8)$$

Из неравенства (8) аналогично тому, как это делается в работе ([4]), получаем оценку (1). Из этого же неравенства можно получить и неравномерную оценку для $\Delta_n(x)$. Имеет место следующая

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для любого $2 < p \leqslant 3$, натурального n и любого $x \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\Delta_n(x) \leqslant C\,\frac{\max\{L_{n,\,p}^{1/p};\ L_{n,\,p}\}}{1 + x^p} \quad (9)$$

с абсолютной константой C.

Заметим, что в работе ([4]) эта теорема была доказана для симметричных с.в. $X_1, X_2, \ldots$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
14 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. В. Прохоров, Теория вероятностей и ее применения, **1**, № 2, 177 (1956). [2] S. Sawyer, Trans. Am. Math. Soc., **132**, 2, 363 (1968). [3] В. Б. Невзоров, В. В. Петров, Теория вероятностей и ее применения, **14**, № 4, 708 (1969). [4] В. Б. Невзоров, Теория вероятностей и математическая статистика, в. 3, 105 (1970).