Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 6

УДК 513.7

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ШАПИРО

О ПРИВОДИМЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ЛОКАЛЬНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1972)

Пусть на многообразии X^n (отделимом, со счетной базой, класса C^∞) заданы два инволютивных (голономных) распределения $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ размерности ν и $n-\nu$ (целое число ν больше нуля). $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ назовем дополнительным (друг для друга), если прямая сумма векторных пространств $\mathfrak{M}_1(p)$ и $\mathfrak{M}_2(p)$ равна касательному (в $p \in X^n$) к X^n векторному пространству X_p^n.

Максимальные интегральные многообразия (листы) распределений $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ образуют двулистную структуру на X^n.

Многообразие X^n назовем приводимым, если 1) на нем заданы некоторые дополнительные друг для друга распределения ($\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$), 2) универсальное накрывающее многообразие $\bar{X}^n$ является произведением двух многообразий X_i, $i = 1, 2$, 3) естественная двулистная структура произведения накрывает двулистную структуру на X^n, образованную листами распределений $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ (т. е. если $p \in X^n$, $\bar{p} \in \bar{X}^n$, $\mathscr{V}(p)$ — лист структуры на X^n, проходящий через p, Ω — накрывающее отображение и $\Omega\bar{p} = p$, то найдется такой лист $\overline{\mathscr{V}}(\bar{p})$ «естественной» структуры произведения, проходящий через $\bar{p}$, что $\Omega(\overline{\mathscr{V}}(\bar{p})) = \mathscr{V}(p)$).

Упомянутую двулистную структуру на X^n назовем специальной и будем обозначать $\mathrm{St}_2{}^X$. Базисные многообразия полных приводимых или невырожденно-приводимых (псевдо-римановых пространств) являются приводимыми вследствие теорем де Рама ([1]) и Ву ([2]). Основным объектом исследования является здесь некоторый («суперинволютивный») класс приводимых X^n.

Инволютивное распределение $\mathfrak{M}$ на X^n называется суперинволютивным (см. ([3], [4])), если для каждой точки $p \in X^n$ существует такая (включающая p) адаптированная к $\mathfrak{M}$ координатная пара (V, φ) *, что различным сечениям куба $\varphi(V)$ соответствуют различные максимальные интегральные многообразия (листы) распределения $\mathfrak{M}$, содержащие прообразы этих сечений. Суперинволютивность $\mathfrak{M}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы на множестве $(\widetilde{\mathfrak{M}})$ листов $\mathfrak{M}$ можно было ввести дифференциальную структуру (вообще говоря, не отделимую), при которой естественное отображение $X^n \to \widetilde{\mathfrak{M}}$ дифференцируемо и регулярно. Если X^n компактно, то $\widetilde{\mathfrak{M}}$ отделимо.

Структуру $\mathrm{St}_2{}^X$ на приводимом X^n будем называть суперинволютивной (и обозначать через $\mathrm{SSt}_2{}^X$), если базисные распределения ($\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$) суперинволютивны.

Если, например, на компактном X^n заданы для любых суперинволютивных, дополнительных друг для друга распределения, то X^n, как легко доказать, приводимо, причем листы упомянутых распределений образуют структуру $\mathrm{SSt}_2{}^X$ на нем.

* Т. е. $\varphi(V)$ — куб арифметического пространства R^n, сечения (параллельные какой-либо грани куба) которого являются образами (по отображению φ) интегральных многообразий распределения $\mathfrak{M}$ (см. ([6]), стр. 133).

Приводимым является также базисное многообразие (связной) группы Ли Γ с двумя компактными подгруппами Γ_i, $i = 1, 2$, «дополняющими» друг друга в том смысле, что прямая сумма касательных к многообразиям Γ_i в единице группы ε векторных пространств равна касательному к Γ в ε векторному пространству; при этом $\mathrm{SSt}_2{}^X$ на Γ образуется в результате левых сдвигов групп Γ_1 и Γ_2.

Для дальнейшего понадобятся некоторые термины и обозначения. Группу Ψ преобразований топологического пространства X будем называть свободно действующей ((7), стр. 224), если для каждой точки $p \in X^n$ и любого (отличного от id) элемента (f) группы Ψ найдется такая окрестность $\mathcal{U}(p)$, что $\mathcal{U}(p) \cap f\mathcal{U}(p) = \phi$.

Пусть, далее, X_i, $(i = 1, 2)$, — множества и Ψ_i — группы их преобразований, заданные вместе с изоморфизмом φ: $\Psi_1 \to \Psi_2$ группы Ψ_1 на Ψ_2.

Тогда на $X_1 \times X_2$ определена группа преобразований, элементы которой (обозначаемые через $\psi_1 \circ \varphi\psi_1$, где ψ_1 — любой элемент Ψ_1) задаются формулой

$$(\psi_1 \circ \varphi\psi_1)(x_1, x_2) \overset{\text{def}}{=} (\psi_1 x_1; (\varphi\psi_1) x_2),$$

в которой $x_i \in X_i$, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Будем обозначать эту группу $\Psi_1 + \Psi_2$. Предположим, что на многообразии X^n свободно действует группа Ψ его автодиффеоморфизмов. Тогда определено фактор-пространство X^n / Ψ, элементами которого являются орбиты точек X^n относительно Ψ, с обычной фактор-топологией. На X^n / Ψ единственным образом определена дифференциальная структура, при которой естественное отображение $\tilde{\Psi}$: $X^n \to X^n / \Psi$ — локальный диффеоморфизм.

Пусть теперь дана пара $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$. Представлением ее будем называть диффеоморфизм Ξ: $X^n \to X_1 \times X_2/\Psi_1 + \Psi_2$, где X_i, $i = 1, 2$, — многообразия и Ψ_i, заданные на них — вместе с некоторым изоморфизмом $\Psi_1 \to \Psi_2$, — свободно действующие группы автодиффеоморфизмов; кроме того, предполагается, что Ξ преобразует двулистную структуру на $X_1 \times X_2 / \Psi_1 + \Psi_2$, являющуюся образом* естественной двулистной структуры произведения $(X_1 \times X_2)$ при естественном отображении $X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2 / \Psi_1 + \Psi_2$, в $\mathrm{SSt}_2{}^X$.

Теперь может быть сформулирована

Теорема 1. *Пусть дана пара* $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$.

Тогда 1) *на любых двух листах (из различных семейств)* $\mathscr{V}_i$ $(i = 1, 2)$, *структуры* $\mathrm{SSt}_2{}^X$ *определены свободно действующие на них и изоморфные между собой группы диффеоморфизмов* (Ψ_i), *причем существует представление вида* Ξ: $X^n \to \mathscr{V}_1 \times \mathscr{V}_2 / \Psi_1 + \Psi_2$, 2) *группа* Ψ_i *(а также и* $\Psi_1 + \Psi_2$*) изоморфна фактор-группе фундаментальной группы многообразия* X^n *по произведению двух нормальных ее делителей, изоморфных фундаментальным группам многообразий* $\mathscr{V}_i$.

Теорема 1 в применении к группе Γ с двумя компактными, «дополняющими» друг друга подгруппами Γ_i, $i = 1, 2$, приводит к такому выводу.

Пересечение $D = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является конечной и коммутативной группой. Правые сдвиги на Γ_i, соответствующие элементам D, образуют свободно действующую группу диффеоморфизмов Ψ_i; группы Ψ_i изоморфны, причем соответственны по изоморфизму те сдвиги (из Ψ_i), которые соответствуют одному и тому же элементу из D.

Наконец, многообразие Γ диффеоморфно фактор-многообразию $\Gamma_1 \times \Gamma_2 / \Psi_1 + \Psi_2$.

Отсюда, в частности, следует компактность Γ. Аналогичные результаты имеют место для групп Ли Γ с двумя такими (замкнутыми) подгруппами Γ_i, $i = 1, 2$, что $\Gamma_1\Gamma_2 = \Gamma_2\Gamma_1 = \Gamma$.

* Такой образ однозначно определен ввиду инвариантности естественной двулистной структуры произведения $(X_1 \times X_2)$ относительно $\Psi_1 + \Psi_2$.

Группа D, не будучи конечной (вообще говоря) в этом случае, остается дискретной. Если Γ_i односвязны, то D изоморфна фундаментальной группе многообразия Γ.

Представление $\Xi\colon X^n \to X_1 \times X_2 / \Psi_1 + \Psi_2$ пары $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$ определено с точностью до замены X_i любыми диффеоморфными им многообразиями $X_i{}^*$ и замены групп Ψ_i соответствующими им по диффеоморфизму (X_i на $X_i{}^*$) группами $\Psi_i{}^*$.

В связи с этим будем называть X_i и Ψ_i ассоциированными с парой $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$ (и, строго говоря, представлением Ξ).

Теорема 2. *Пусть X_i, $i = 1, 2$, — многообразия и Ψ_i — свободно действующие на них группы диффеоморфизмов.*

Тогда фактор-многообразие $X^n = X_1 \times X_2 / \Psi_1 + \Psi_2$ приводимо, причем его специальная двулистная структура $\mathrm{St}_2{}^X$ супеинволютивна и $\Xi = \mathrm{id}$ является представлением пары $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X (= \mathrm{St}_2{}^X))$.

Теорема 3. *Число точек пересечения двух любых листов (из различных семейств) структуры $\mathrm{SSt}_2{}^X$ равно порядку ассоциированной группы Ψ_i.*

Теорема 4. *Если $\Xi\colon X^n \to X_1 \times X_2 / \Psi_1 + \Psi_2$ — представление пары $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$ и X_i, $i = 1, 2$, — листы структуры $\mathrm{SSt}_2{}^X$ *, то X^n — косое произведение с базой X_1 (или X_2), стандартным слоем X_2 (или X_1) и структурной группой Ψ_2 (или Ψ_1).*

Теорема 5. *На многообразии X^n из пары $(X^n, \mathrm{SSt}_2{}^X)$ можно ввести структуру приводимого полного риманова пространства (VX^n) так, чтобы базисные распределения $(\mathfrak{M}_i)$ структуры $\mathrm{SSt}_2{}^X$ были полями ** абсолютного параллелизма (на VX^n).*

2. Пусть $\mathscr{E}$, X_i, $i = 1, 2$, — многообразия, B — множество значений некоторого индекса β и каждому значению $\beta \in B$ поставлены в соответствие открытые множества $w_{i\beta} \in X_i$ и диффеоморфизм f_β произведения $w_{1\beta} \times w_{2\beta}$ на некоторое открытое множество $\mathscr{E}_\beta \subset \mathscr{E}$. Мы предполагаем, что из $f_\beta = f_{\beta'}$ следует $\beta = \beta'$. Допустим: 1) совокупность $w_{i\beta}$, $\beta \in B$, покрывает X_i, 2) семейство f_β полно, т. е. если f — диффеоморфизм произведения открытых множеств $w_i \in X_i$ на открытое множество из $\mathscr{E}$, то f совпадает с одним из f_β.

Описанную конструкцию будем называть локальным произведением, для которого X_i — сомножители, $\mathscr{E}$ — пространство произведения. Картой локального произведения назовем пару $(\mathscr{E}_\beta, f_\beta)$, а его (полным) атласом — совокупность всех карт.

Пересечение $\mathscr{E}_\beta \cap \mathscr{E}_{\beta_1'}$, β, $\beta_1 \in B$, определяет переходную функцию $\varphi_{\beta\beta_1} = f_{\beta_1} \circ f_\beta^{-1}$.

Понятие локального произведения очевидным образом распространяется на любое (конечное) число сомножителей. Допустим, что атлас A локального произведения $(\mathscr{E}, X_i, f_\beta)$ допускает податлас A', составленный из карт $(\mathscr{E}_{\beta'}, f_{\beta'})$, $\beta' \in B' \subset B$, для которых 1) $f_{\beta'}{}^{-1}(\mathscr{E}_{\beta'}) = w_{1\beta'} \times X_2$, 2) переходные функции $\varphi_{\beta'\beta_1'}$, β', $\beta_1' \in B'$, можно записать в виде

$$\overset{*}{x}_1 = x_1, \quad \overset{*}{x}_2 = \mu_{\beta'\beta_1'}(x_1, x_2),$$

где $x_i \in X_i$, $x_i{}^* \in X_i$ и функция $\mu_{\beta'\beta_1'}$ определена функцией $\varphi_{\beta'\beta_1'}$. Далее определим каноническую проекцию $p\colon \mathscr{E} \to X_1$ условием $pf_{\beta'}(x_1, x_2) = x_1$. Теперь мы получаем слой $p^{-1}(x_1)$ над $x_1 \in X_1$ и отображение $h_{x_1}{}^{\beta'}(x_2) \cdot (= f_{\beta'}(x_1, x_2)\colon X_2 \to p^{-1}(x_1))$. Мы потребуем еще 3) $h_{x_1}{}^{\beta'}$ сюръективно.

При выполнении этих условий $\mathscr{E}$ — пространство (локально тривиального) расслоения, X_1 — его базис, X_2 — стандартный слой и A' — атлас.

---

* Такое представление существует для каждой пары листов (из различных семейств) структуры $\mathrm{SST}_2{}^X$.

** Имеются в виду поля m-мерных направлений (m-плоскостей).

Условия 1), 2) и 3) необходимы и достаточны, для того чтобы наряду с локальным произведением ($\mathscr{E}$, X_1, X_2, A) существовало вышеописанное локально тривиальное расслоение ($\mathscr{E}$, X_1, X_2, A'). В случае когда атлас A локального произведения допускает податлас $\widetilde{A}$, для которого переходные функции имеют вид

$$\overset{*}{x}_1 = \overset{*}{x}_1(x_1), \quad \overset{*}{x}_2 = \overset{*}{x}_2(x_2), \tag{!}$$

будем называть четверку ($\mathscr{E}$, X_1, X_2, $\widetilde{A}$) * локально-прямым произведением.

Предложение. *Каждое приводимое многообразие является некоторым локально прямым произведением.*

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступило 9 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G. de Rahm, Comment. math. helv., 26, 328 (1952). [2] H. Wu, Bull. Am. Math. Soc., 70, № 4 (1964). [3] Я. Л. Шапиро, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4 (1970). [4] Я. Л. Шапиро, там же, № 10 (1971). [5] Клод Шевалле, Теория групп Ли, ИЛ, 1948. [6] Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, Риманова геометрия в целом, М., 1971.

* Атлас $\widetilde{A}$ предполагается полным при соблюдении условия (!).