Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 4

УДК 551.465.555 *ГЕОФИЗИКА*

Д. У. ВАПНЯР

О ВЛИЯНИИ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ВОЛН РОССБИ НА СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 24 IV 1972)

Известно, что, благодаря нелинейным инерционным ускорениям, периодические внешние возмущения могут вызывать установившиеся стационарные течения ([1-3]). В приложении к теории течения Кромвелла этот эффект изучался в ([4]), однако рассматривались только свободные волны, которые определяются с точностью до некоторой константы. В настоящей статье рассматривается задача расчета экваториальных волн Россби, возбуждаемых периодическим ветром, и экваториальных стационарных течений, которые возникают как вторичный эффект действия чисто периодического ветра.

Исходную систему уравнений гидродинамики запишем в виде

$$\frac{du}{dt} - \Omega v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$
$$\frac{dv}{dt} + \Omega u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right); \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g; \quad \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{d\rho'}{dt} + w\frac{d\rho^*}{dz} = 0, \quad \rho = \rho^*(z) + \rho'(x, y, z, t), \quad \rho' < \rho^*; \tag{3}$$

здесь u, v, w — составляющие скорости течения по координатным осям X, Y, Z соответственно, p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, Ω — параметр Криолиса, A_z — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости, t — время.

Граничные условия. Направим ось Z вертикально вниз. Тогда при $z = -\xi$

$$\frac{d\xi}{dt} + w = 0, \quad p = p_a = \text{const}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{T_x}{\rho A_z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{T_y}{\rho A_z}; \tag{4}$$

при $z = H = \text{const}$

$$w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

где ξ — уровень моря, p_a — атмосферное давление, T_x и T_y — составляющие тангенциального напряжения ветра, H — глубина моря. На горизонтальных границах океана $(u_n)_L = 0$, где L — контур бассейна, а n — направление внутренней нормали к нему.

В качестве первого шага рассматривается линейная задача, нелинейные составляющие учитываются во втором приближении. При этом они распадаются на две части — периодическую, с периодом, кратным периоду возмущающей силы, и стационарную, которая входит в уравнения движения в виде внешней массовой силы, не зависящей от времени. Под ее воздействием и создаются установившиеся стационарные течения.

Решение линейной задачи о расчете ветровых периодических течений рассмотрено в ([5]). Если в поверхностном слое моря $\rho^* = \rho_0 = \text{const}$, а в бароклинном $\rho^* = f(z)$, то можно допустить, что $A_z = A_1(z)$ при $z < h$

и $A_z \equiv 0$ при $z \geqslant h$, где h — толщина верхнего однородного слоя. В линейной постановке эта задача сводится к решению системы уравнений относительно горизонтальных составляющих скорости в бароклинном слое моря. Тангенциальное напряжение ветра передается через поверхностный однородный слой бароклинному и входит в условия на поверхности

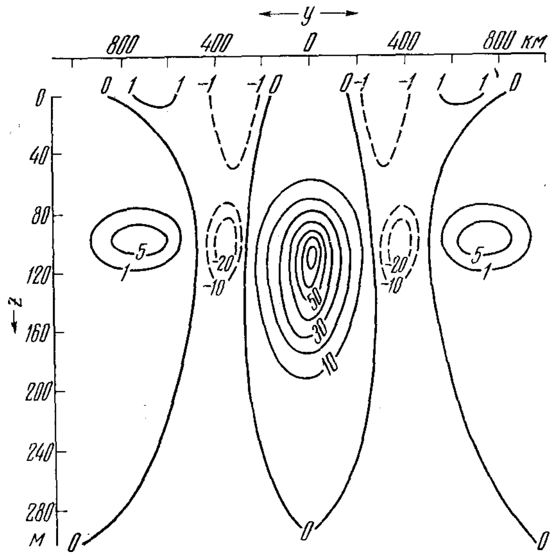

Рис. 1. Распределение зональной составляющей скорости стационарного течения на разрезе, пересекающем экватор

этого слоя в виде напряжений, приложенных к соответствующим координатным осям ([5]):

$$\Phi_x = \frac{i\sigma\tilde{T}_x + \Omega\tilde{T}_y}{(\sigma^2 - \Omega^2)\rho_0}, \quad \Phi_y = \frac{i\sigma\tilde{T}_y - \Omega\tilde{T}_x}{(\sigma^2 - \Omega^2)\rho_0},$$

где $T_x = R_e\tilde{T}_x e^{i\sigma\tau}$, $T_y = R_e\tilde{T}_y e^{i\sigma\tau}$, σ — угловая частота, $i = \sqrt{-1}$.

Если искать решение задачи вида $\tilde{u} = F(z)\bar{\tilde{u}}(x, y)$, $\tilde{v} = F(z)\bar{\tilde{v}}(x, y)$, то после разделения переменных получаем

$$F'' - \frac{\varphi'}{\varphi}F + k^2 g\varphi F = 0; \tag{6}$$

$$\text{при } z_1 = h \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} - \varphi + g\varphi k^2 h\right) F = g\varphi k^2 \Phi_k, \quad \text{при} \quad z = H \quad F' = 0, \tag{7}$$

где $\varphi = \dfrac{1}{\rho^*}\dfrac{d\rho^*}{dz}$, $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dz}$, k — константа разделения переменных, Φ_k — коэффициент, связанный с амплитудой функции Φ_x и Φ_y;

$$-\omega^2\bar{\tilde{u}} - i\omega y_1\bar{\tilde{v}} = \frac{\partial^2\bar{\tilde{u}}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\bar{\tilde{v}}}{\partial x_1 \partial y_1}, \quad -\omega^2\bar{\tilde{v}} + i\omega y\bar{\tilde{u}} = \frac{\partial^2\bar{\tilde{u}}}{\partial x_1 \partial y_1} + \frac{\partial^2\bar{\tilde{v}}}{\partial y_1^2}; \tag{8}$$

здесь u, $v = \tilde{u}$, $\tilde{v}e^{i\sigma\tau}$, $\Omega \approx \beta y$, $y_1 = y / L$, $x_1 = x / L$, $L = 1 / (\beta k)$, $\omega = \sigma / \beta L$.

Допустим, что океан простирается с севера на юг в виде полосы, включающей экватор. Если на западной границе океана $x = 0$, его ширина с запада на восток равна l, а с севера и с юга океан не ограничен, то решение уравнения (8) может отвечать следующим условиям:

$$\text{при } x_1 = 0, l \quad u = 0, \quad y_1 \to \pm\infty \quad v = 0. \tag{9}$$

Решение спектральной задачи (8), (9) рассмотрено в ([6]). Оно определяется в рядах по полиномам Эрмита от безразмерной переменной y_1;

$$v_j = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{v}_{j+2s}(x) H_{j+2s}(y_1) \exp\left(-\frac{1}{2} y_1^2\right),$$

$$u_j = \sum_{s=1}^{\infty} \hat{u}_{2s+j-1}(x) H_{2s+j-1}(y_1) \exp\left(-\frac{1}{2} y_1^2\right),$$

где $j = 1, 2, 3, \ldots$ определяет моду данной волны, а s — соответствующее частное решение, из суммы которых складывается общее решение задачи; u и v могут быть четными либо нечетными функциями y_1. При этом для всех j определяются собственные значения ω и далее параметр

$$k_{1,2} = \frac{(2j+1)\beta}{2\sigma^2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{(2j+1)^2}\left(1 - \frac{4m^2\pi^2\sigma^2}{\beta^2 l^2}\right)}\right], \quad m = 1, 2.$$

При малых $\sigma \leqslant 10^{-5}$ сек$^{-1}$ и $m = 1, 2$ $\quad \dfrac{4m^2\pi^2\sigma^2}{\beta^2 l^2} < 1$, $\; k_1 \approx \dfrac{(2j+1)\beta}{\sigma^2}$, $k_2 \approx \dfrac{\beta}{4\sigma^2(2j+1)}$.

В зависимости от k находится параметр безразмерности L^2, определяющий меридиональную структуру движения: $L_1^2 = \sigma^2 / [(2j+1)\beta^2]$, $L_2^2 = 4(2j+1)\sigma^2 / \beta^2$. Поэтому функции Эрмита при различных значениях k имеют различный вид:

$$V_1 = H_j\left(\frac{\beta y \sqrt{2j+1}}{\sigma}\right) \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\beta^2 y^2}{\sigma^2}(2j+1)\right],$$

$$V_2 = H_j\left(\frac{\beta y}{2\sigma\sqrt{2j+1}}\right) \exp\left[-\frac{1}{8} \frac{\beta^2 y^2}{\sigma^2(2j+1)}\right].$$

Простые оценки показывают, что только волны типа V_1 быстро затухают с удалением от экватора при любых значениях j. Они представляют собой локальные волны экваториальной зоны океана и привлекаются в дальнейшем для решения задачи о стационарных течениях.

Конкретные формулы, определяющие u и v, можно записать в виде

$$v = BV[(\omega - \alpha_1)\cos\eta_1 - (\omega - \alpha_2)\cos\eta_2]F(z) + R(x, y, z, t), \tag{10}$$

$$u = \frac{B}{2(s+1)}[(\omega + \alpha_2)U_1 \sin\eta_1 - (\omega + \alpha_1)U_2 \sin\eta_2]F(z) + T(x, y, z, t), \tag{11}$$

где $V = H_s \exp(-{}^1/_2 y_1^2)$, $U_{1,2} = \omega y_1 V + \alpha_{1,2}\, dV / dy_1$, $\eta_{1,2} = \sigma t + \alpha_{1,2} x$, $\alpha_{1,2} = 1/(2\omega) \pm m\pi / l_1$, $B = f(j, \sigma, \Phi_k)$.

Функции R и T затухают с удалением от западного и восточного берегов бассейна. На расстоянии от берега порядка 100 км ими можно пренебрегать и учитывать только первые части формул (10), (11). По известным значениям u и v находятся w и ρ'.

Воспользуемся теперь формулами (10), (11) для решения задачи во втором приближении. Введем обозначения

$$M_x = \overline{u\, \partial u} / \partial x + \overline{v\, \partial u} / \partial y + \overline{w\, \partial u} / \partial z, \; M_y = \overline{u\, \partial v} / \partial x + \overline{v\, \partial v} / \partial y + \overline{w\, \partial v} / \partial z.$$

Черта сверху означает, что учитываются только те части этих произведений, которые не зависят от времени. Подставляя сюда u, v и w без учета функций R и T, найдем

$$M_x = \frac{2m\pi}{l_1}\psi_x(y,z)\sin\frac{2m\pi}{l}x, \quad M_y = \psi_0(y,z) + \psi_y(y,z)\sin\frac{2m\pi}{l}x;$$

Ψ_x, Ψ_y и Ψ_0 очень громоздки, поэтому мы их не выписываем. Отметим лишь, что при всех значениях j Ψ_0 и Ψ_y — нечетные функции y_1, а Ψ_x — функция четная.

В уравнении для плотности $\overline{w\partial\rho'} / \partial z = \overline{0\ u\partial\rho'} / \partial x = -\overline{v\partial\rho'} / \partial y$.

Поэтому, если не учитывается турбулентная диффузия, то $\overline{w} = 0$ и общая система уравнений приводит на втором шаге к следующей задаче для установившихся стационарных течений:

$$-\beta y\bar{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x} - M_x, \quad \beta y\bar{u} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y} + M_y, \quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial y} = 0.$$

Полагая $u = 0$ при $x = l$, имеем

$$\bar{v} = -\frac{2m\pi}{\beta Ll}\left(\psi_y + \frac{\partial\psi_x}{\partial y}\right)\sin\frac{2m\pi}{l}x, \quad \bar{u} = \frac{1}{\beta L}\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y_1} + \frac{\partial^2\psi_x}{\partial y_1^2}\right)\sin^2\frac{m\pi}{l}x.$$

Из этих формул ясно, что $\bar{v}$ всегда антисимметрично относительно экватора, а $\bar{u}$ всегда симметрично. На экваторе

$$\bar{u} = \frac{B^2}{4\beta L^2(j+1)}\left\{\left[(2j+1)v_2 - \left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right]\left[16j(j+1)F^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (8j^2+12j+2)\frac{(F^1)^2}{k^2}\right]\right\}\sin^2\frac{m\pi}{l}x.$$

При четных значениях j $(dv / dy)^2 = 0$, $\bar{u}$ положительно. Течение направлено с запада на восток. При нечетных j $v^2 = 0$, $\bar{u}$ отрицательно, течение направлено с востока на запад. Скорость течения быстро затухает с удалением от экватора пропорционально $\exp(-y_1^2)$.

Конкретные расчеты стационарных течений были выполнены для двухслойной модели функции φ, учитывающей слои скачка плотности. На рис. 1 показаны изотахи зональной составляющей скорости течения на разрезе, пересекающем экватор. Как можно видеть, течение располагается под поверхностью океана в узкой полосе симметрично относительно экватора. Его основная струя находится в слое скачка плотности, а скорость максимальна в зоне максимальных значений $d\rho^* / dz$. Это подтверждается и приводимыми ниже результатами расчетов $\bar{u}$ на экваторе (расчеты проводились при $\Phi_k = 0{,}5$ дин/см^2 / σ):

z, м	50	60	75	100	125	150
$\bar{u}$, см/сек ($\sigma = 10^{-5}$ сек$^{-1}$)	5	6	15	26	38	47
$\bar{u}$, см/сек ($\sigma = 0{,}7\cdot10^{-5}$ сек$^{-1}$)	7	9	15	30	46	81

Таким образом, полученные результаты показывают, что экваториальные стационарные течения, обусловленные периодическим ветром, могут быть значительными даже при небольших амплитудах тангенциального напряжения ветра и отличаются рядом особенностей, характерных для течений Кромвелла и Ломоносова.

Морской гидрофизический институт
Академии наук УССР
Севастополь

Поступило
4 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, М., 1956. [2] J. Pedlosky, Tellus, 19 (1967). [3] G. Veronis, Deep—Sea Res., 17, № 3 (1970). [4] W. Munk, D. J. Moore, Fluid Mech., 33 (1968). [5] Д. У. Ваппяр, Морские гидрофизич. иссл., № 6 (1971). [6] Д. У. Ваппяр, там же, № 3 (1970).