

М. И. ВИШИК

**ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ  
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ЛЮБОГО ПОРЯДКА  
С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 V 1972)

В <sup>(1, 2)</sup> рассмотрен некоторый класс бесконечномерных эллиптических операторов, фундаментальные решения которых реализуются как вполне аддитивные функции множеств, имеющие ограниченную вариацию. В <sup>(2)</sup> доказано, что у оператора  $(-\Delta + \lambda)$ , где  $\Delta$  — бесконечномерный лапласиан, при  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$  и  $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$  соответствующее фундаментальное решение имеет неограниченную вариацию по гильбертову пространству, хотя его вариация конечна по любому конечномерному подпространству. В настоящей заметке доказано, что для всякого бесконечномерного равномерно эллиптического оператора  $L_m(D)$  порядка  $m$  с постоянными коэффициентами существует фундаментальное решение, являющееся непрерывным функционалом над некоторым топологическим пространством  $CS$ .

1. Обозначим через  $\mathbf{R}^\infty$  пространство всех финитных последовательностей:  $\mathbf{R}^\infty = \{x: x = (x_1, \dots, x_n, 0, 0, \dots), x_i \in \mathbf{R}^1, n \text{ зависит от } x\}$ . Введем в  $\mathbf{R}^\infty$  скалярное произведение  $(x, y) = \sum x_i y_i, \|x\|^2 = (x, x)$ . На  $\mathbf{R}^\infty$  рассмотрим форму  $L_m(\xi)$  порядка  $m$ :

$$L_m(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi \in \mathbf{R}^\infty, \quad \xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \dots, \quad (1)$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots), \quad \alpha_i \in \mathbf{Z}^+, \quad a_\alpha \in \mathbf{C}, \quad a_\alpha = \text{const.}$$

Скажем, что форма  $L_m(\xi)$  равномерно эллиптическая, если:

1) Для любых  $\eta', \eta'' \in \mathbf{R}^\infty, \|\eta'\| = 1, (\eta', \eta'') = 0$  многочлен  $L_m(s\eta' + \eta'')$  относительно  $s$  имеет  $m$  комплексных корней  $s = s_j(\eta', \eta'')$ , для которых имеют место оценки

$$\|\operatorname{Im} s_j\| \geq \gamma_1^2 (\|\eta''\| + 1), \quad |s_j| \leq C (\|\eta''\| + 1), \quad \gamma_1^2, C > 0, \quad (2)$$

причем  $\gamma_1^2$  и  $C$  не зависят от  $\eta'$  и  $\eta''$ ;

2) Для любых  $s \in \mathbf{C} |L_m(s\eta' + \eta'')| \leq C(|s| + \|\eta''\|)^m$ ;

3)  $|L_m^0(\eta')| \geq \gamma_0^2 > 0$  для любого  $\eta' \in \mathbf{R}^\infty, \|\eta'\| = 1$ , где  $L_m^0(\xi)$  — главная часть  $L_m(\xi)$ , выражаемая суммой (1), взятой по всем  $\alpha$  с  $|\alpha| = m$ . Класс таких равномерно эллиптических форм  $L_m(\xi)$  порядка  $m$  обозначим через  $\mathcal{E}_m$ .

Пусть  $P_N$  — оператор проектирования  $\mathbf{R}^\infty$  на подпространство  $\mathbf{R}^N$  элементов вида  $\xi^N = (\xi_1, \dots, \xi_N, 0, 0, \dots): P^N \xi = \xi^N$ , если  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N, \xi_{N+1}, \dots)$ . Пусть  $Q_r(\xi)$  — форма порядка  $r < m$  (т. е.  $Q_r(\xi)$  выражается формулой вида (1), в которой  $m = r$ ). Для любого  $N \in \mathbf{Z}^+$  рассмотрим функции

$$G_N(z^N) = (2\pi)^{-N} \int A(\xi^N) e^{i(\xi^N, z^N)} d\xi^N, \quad A(\xi^N) = Q_r(\xi^N) / L_m(\xi^N), \quad (3)$$

где  $L_m(\xi) \in \mathcal{E}_m, r < m$ . Очевидно,  $G_N(z^N)$  экспоненциально убывают при  $z^N \rightarrow \infty$ . Будем говорить, что функции  $\{G_N\}$  отвечают символу  $A(\xi)$ . Как

показано в (1), стр. 162, они согласованы между собой в следующем смысле:

$$G_N(z^N) = \int G_{N+1}(z^{N+1}) dz_{N+1}, \quad (4)$$

где  $z^{N+1} = (z_1, \dots, z_N, z_{N+1}, 0, 0, \dots)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $L_m(\xi) \in \mathcal{E}_m$ , а  $Q_r(\xi)$  — форма порядка  $r < m$ , удовлетворяющая условию 2) с  $m = r$ . Тогда: 1) существуют такие константы  $C$  и  $M \geq 1$ , что

$$\|G_N(z^N)\|_{L_1} = \int |G(z^N)| dz^N \leq C \cdot M^N; \quad (5)$$

II) для  $a_N = N(M_1 \ln M_1)$ ,  $M_1 > M$ , справедливы оценки

$$I_N = \int_{\|z^N\| \geq a_N} |G^N(z^N)| dz^N \leq C \gamma_0^N, \quad \text{где } \gamma_0 < 1, \quad (6)$$

$C$  не зависит от  $N$ .

**Доказательство.** Пусть  $B: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^N$  — некоторая ортогональная матрица, переводящая заданную точку  $z^N \in \mathbf{R}^N$  в точку  $w = (\|z^N\|, 0, \dots, 0, \dots)$ :  $Bz^N = w$ ,  $B = B(z^N)$ . Произведем в интеграле (3) замену переменных  $B\xi^N = \eta^N$ :

$$G_N(z^N) = (2\pi)^{-N} \int A(B^{-1}\eta^N) e^{i(w, \eta^N)} d\eta^N = (2\pi)^{-N} \int A(B^{-1}\eta^N) e^{i\|z^N\| \eta_1} d\eta^N. \quad (7)$$

Пусть  $\eta^N = \eta_1 \cdot \eta' + \eta''$ , где  $\eta' = (1, 0, 0, \dots)$ ,  $\eta'' = (0, \eta_2, \dots, \eta_N, 0, 0, \dots)$ . Тогда  $B^{-1}\eta^N = \eta_1 \cdot \xi' + \xi''$ , где  $\|\xi'\| = 1$ ,  $\|\xi''\| = \|\eta''\|$ ,  $(\xi', \xi'') = 0$ . Следовательно,  $A(B^{-1}\eta^N) = A(\eta_1 \xi' + \xi'')$ . В комплексной плоскости  $\eta_1$ ,  $\eta_1 \in \mathbf{C}$ , в силу (2), существуют такие окружности  $K_j$  радиуса  $\gamma_2^2(\|\eta''\| + 1)$ , где  $\gamma_2^2 < \gamma_1^2$  (см. (2)), с центрами в корнях  $s_j$  многочлена  $L_m(s \xi' + \xi'')$ , что для  $\eta_1 \in K_j$ .

$$|L_m(\eta_1 \xi' + \xi'')| = |L_m^0(\xi')| \cdot \prod_1^m |\eta_1 - s_j| \geq c^2 (\|\eta''\| + 1)^m, \quad (8)$$

$\|\eta''\| = \|\xi''\|$ . Интеграл в (7) представим в виде повторного по  $\eta_1$  и  $\eta''$ , затем интеграл по  $\eta_1$ , согласно теореме Коши, продеформируем в сумму интегралов по окружностям  $K_j$  с центрами в  $s_j$ , где  $\text{Im } s_j > 0$ . Оценив сверху последние интегралы, получим

$$\begin{aligned} |G_N(z^N)| &\leq C (2\pi)^{-N} \int (1 + \|\eta''\|)^{r-m+1} e^{-\gamma(\|\eta''\|+1)\|z^N\|} d\eta'' \leq \\ &\leq C_1 (2\pi)^{-N} e^{-\gamma\|z^N\|} \Omega_{N-1} p! \|z^N\|^{-p-1} \gamma^{-p-1}, \quad p = N + r - m - 1, \quad 1 \geq \gamma > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом учтены оценка (8),  $d\eta'' = \|\eta''\|^{N-2} d\omega_{N-1} d\|\eta''\|$ ,  $|Q_r|_{K_j} \leq C(1 + \|\eta''\|)^r$ ;  $\Omega_{N-1} = 2(\sqrt{\pi})^{N-1} / \Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)$  — площадь единичной сферы в  $\mathbf{R}^{N-1}$ . Интегрируя обе части (9) по  $z^N \in \mathbf{R}^N$ , получим

$$\|G_N(z^N)\|_{L_1} \leq C_1 \Omega_N \Omega_{N-1} p! (2\pi)^{-N} \gamma^{-N} \leq CM^N, \quad (10)$$

где  $M = \gamma^{-1}$ . Здесь мы воспользовались формулой Стирлинга для  $\Gamma(n)$  и тем, что  $p! \leq (N-2)!$ .

Оценка (6) выводится аналогично: обе части (9) интегрируем по области  $\|z^N\| \geq a_N$ :

$$\int_{\|z^N\| \geq a_N} |G_N(z^N)| dz^N \leq C \Omega_N \Omega_{N-1} (2\pi)^{-N} p! \gamma^{-p} e^{-\gamma a_N}, \quad (11)$$

где  $M_1^{-1} < \gamma_3 < \gamma$ . Так как  $a_N = N \cdot (M_1 \ln M_1)$ ,  $M_1 > 1$ , то из (11) следует (6) с  $\gamma_0 = \exp[-\ln(M_1 \gamma)] < 1$ .

2. Пространство  $CS$ . Через  $f_N(x)$  будем обозначать цилиндрические функции от  $N$  переменных:  $f_N(x) = f(P^N(x))$ , принадлежащие  $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ . Класс всех таких функций обозначим через  $C_\Phi(N)$ , а объединение всех  $C_\Phi(N)$  по  $N$  — через  $C_\Phi$ :  $C_\Phi = \cup C_\Phi(N)$ .

Мы скажем, что функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbf{R}^\infty$ ,  $f: \mathbf{R}^\infty \rightarrow \mathbf{C}$ , принадлежит пространству  $CS(M, a_N)$ , где  $M \geq 1$ ,  $a_N \uparrow +\infty$ ,  $a_N > 0$ , если существует такая последовательность  $\{f_N(x)\}$ ,  $f_N(x) \in C_\Phi(N)$ , что 1)  $f_N(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}^\infty$ ,

$$2) \sum_{N=0}^{\infty} \|f_N(x) - f_{N-1}(x)\|_{a_N} \cdot M^N < +\infty, \text{ где } \|\varphi\|_a = \sup_{\|x\| < a} |\varphi(x)|, f_{-1} \equiv 0. \quad (12)$$

Через  $p(f; M, a_N)$  обозначим нижнюю грань всех значений сумм (12) по любым последовательностям  $\{f_N\}$ , обладающим свойствами 1) и 2). Очевидно,  $p(f; M, a_N)$  — норма функции  $f(x)$  в  $CS(M, a_N)$ . Относительно нее  $CS(M, a_N)$  полно. Заметим, что если  $\{f_N(x)\}$  обладает свойствами 1), 2), то  $p(f - f_N; M, a_N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$ .

Пусть  $CS_b(M, a_N)$  — пространство всех тех функций из  $CS(M, a_N)$ , для каждой из которых существует последовательность  $\{f_N(x)\}$ ,  $f_N \in C_\Phi(N)$ , удовлетворяющая условиям 1), 2) и еще условию 3):  $\|f_N(x)\|_\infty \leq K \quad \forall N$ . Аналогично определяется сходимость последовательности  $\{g_n\}$ , где  $g_n \in CS_b(M, a_N)$  и  $g_n$  — необязательно цилиндрические функции.

В <sup>(1, 2)</sup> было введено пространство  $CL = CL(a_N)$ , состоящее из функций  $f(x)$ , для которых соответствующие последовательности  $f_N(x)$  обладают следующими свойствами: а)  $f_N(x) \Rightarrow f(x)$  равномерно по  $x$  на любом шаре

$$\|x\|_1^2 \leq R^2, \text{ где } \|x\|_1^2 = \sum x_i^2 / a_i^2, \sum a_i^{-2} < +\infty; \text{ б) } |f_N(x)| \leq C \quad \forall N.$$

Пусть  $\{G_N(z^N)\}$ ,  $M$ ,  $\{a_N\}$  и  $\{I_N\}$  — такие же, как в теореме 1, и пусть  $\{c_N\}$  — некоторая возрастающая последовательность чисел:  $c_N \uparrow +\infty$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in CS_b(M \cdot K, a_N + c_N)$  ( $=CS_b$ ) и  $\{f_N(x)\}$  — соответствующая  $f(x)$  последовательность функций, обладающая свойствами 1), 2), 3). Тогда свертки  $G_N * f_N(x) = v_N(x)$  принадлежат  $CS(K, c_N)$  ( $=CS$ ), где  $K_{\gamma_0} < 1$  (см. (6)),  $v_N(x) = v(P^N x)$  и при  $N \rightarrow +\infty$   $v_N(x) \rightarrow v(x)$  в  $CS$ .

Докажем сначала, что  $v_N(x) \in CS$ . Пусть  $\psi_k(x) \in C_\Phi(k)$ ,  $\psi_k(x) = 1$  для  $\|P^k x\| \leq c_{k+1}$ ,  $\psi_k(x) = 0$  для  $\|P^k x\| \geq 2c_{k+1}$ ,  $\psi_k(x) = \psi_k(P^k x)$ . Тогда при  $k \rightarrow +\infty$  последовательность  $\psi_k(x)v_N(x) \rightarrow v_N(x)$  в  $CS$  и  $v_N(x) \in CS$ .

В силу (4)  $G_{N-1} * f_{N-1}(x) = G_N * f_{N-1}(x)$ . Для  $\|x\| \leq c_N$  имеем

$$\begin{aligned} |v_N(x) - v_{N-1}(x)| &= |G_N * (f_N - f_{N-1})(x)| = \\ &= \left| \int_{\|z^N\| < a_N} + \int_{\|z^N\| \geq a_N} [G_N(z^N)(f_N(x-z) - f_{N-1}(x-z))] dz^N \right| \leq \\ &\leq CM^N \|f_N - f_{N-1}\|_{a_N + c_N} + I_N (\|f_N\|_\infty + \|f_{N-1}\|_\infty). \end{aligned} \quad (13)$$

Взяв верхнюю грань по  $x$ ,  $\|P^N x\| \leq c_N$ , умножив обе части (13) на  $K^N$  и просуммировав по  $N$ , получим

$$p(v; K, c_N) \leq 2Cp(f; K \cdot M, a_N + c_N) + 2 \sup_N \|f_N\|_\infty \cdot \sum_N K I_N;$$

Здесь  $v(x) = \lim v_N(x)$ , а  $\{f_N\}$  — такая последовательность, для которой сумма (12) близка к  $p(f; K \cdot M, a_N + c_N)$ . Очевидно,  $p(v - v_N; K, c_N) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .  $\square$

Легко видеть, что функция  $v(x)$  зависит лишь от  $f(x)$  и не зависит от выбора  $\{f_N\}$ . Поэтому однозначно определен оператор  $Gf = v = \lim G_N * f_N$ , где  $f_N(x) \rightarrow f(x)$  в  $CS_b(M \cdot K, a_N + c_N)$ . Его естественно назвать оператором свертки обобщенной функции  $G$  и функции  $f(x) \in CS_b$ . Распределение  $G$  яв-

ляется в определенном смысле фундаментальным решением оператора  $L_m(D)$ .

В заключение отметим, что с помощью аналогичных построений можно установить существование фундаментального решения  $G$  для общего параболического оператора, например, для оператора вида  $\partial / \partial t + L_m(D)$ , где  $L_m^0(\xi) > 0$ ,  $\xi \neq 0$ . И в этом случае  $G$  является, вообще говоря, обобщенной функцией, заданной на соответствующем пространстве  $CS_b$ .

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
18 IV 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> М. И. Вишик, УМН, 24, в. 2 (158) (1971). <sup>2</sup> П. М. Блехер, М. И. Вишик, Матем. сборн., 86 (128), № 3 (1971).