Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 5

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

Г. А. КОЛУПАНОВА

ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 27 III 1972)

В настоящей работе изучается дифференциальное уравнение гиперболического типа

$$\partial x / \partial t = (A(s) + \partial / \partial s)x, \quad 0 \leqslant s, \quad t < \infty, \tag{1}$$

где $x(t, s)$ — искомая функция со значениями в банаховом пространстве E; $A(s)$ — при каждом $s \in [0, \infty)$ — замкнутые неограниченные операторы, имеющие плотную в E общую область определения $D(A)$.

Уравнение (1) можно трактовать как эволюционное уравнение в функциональных пространствах, состоящих из функций от s на $[0, \infty)$ со значениями из E. Тогда естественной является постановка следующей задачи Коши для уравнения (1): требуется найти решение (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x(0, s) = \varphi(s). \tag{2}$$

За функциональное пространство, упомянутое выше, мы принимаем пространство $\hat{C}(E; [0, \infty))$ всех непрерывных функций на $[0, \infty)$ со значениями в пространстве E, имеющих пределы на ∞, снабженное нормой

$$\|x\|_{\hat{C}} = \sup_{0 \leqslant s < \infty} \|x(s)\|_E.$$

Множество всех непрерывно дифференцируемых функций этого пространства со значениями в $D(A)$, для которых $A(s)x(s) \in \hat{C}(E; [0, \infty))$ и $\partial x(s) / \partial s \in \hat{C}(E; [0, \infty))$, обозначаем через F, а область определения замыкания оператора с F — через $D(A(s) + \partial / \partial s)$.

Под решением уравнения (1) мы теперь понимаем функцию $x(t, s)$, непрерывно дифференцируемую по t и такую, что при каждом $t \geqslant 0$ $x(t, s) \in D(A(s) + \partial / \partial s)$ и удовлетворяет уравнению (1).

Задача (1), (2) называется равномерно корректной, если для каждой функции $\varphi(s) \in D(A(s) + \partial / \partial s)$ существует решение задачи (1), (2), для которого справедлива оценка

$$\|x(t, s)\|_{\hat{C}} \leqslant M e^{\omega t} \|\varphi\|_{\hat{C}}.$$

Известно [1], что равномерно корректная задача порождает полугруппу класса C_0. Полугруппа $V(t)$, порожденная равномерно корректной задачей (1), (2), действует в пространстве $\hat{C}(E; [0, \infty))$, которое в качестве констант содержит все элементы пространства E. Поэтому на элементах из E можно определить линейный оператор $U(t, s)$ формулой

$$U(t + s, s)x \overset{\text{def}}{=} (V(t)x)(s), \quad x \in E. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть операторы $A(s)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1^0) *оператор $A(s)$, $0 \leqslant s < \infty$, сильно непрерывен на $D(A)$;*

2^0) *при каждом $t \in [0, \infty)$ существует ограниченный оператор $A^{-1}(t)$, причем*

$$\|A(s)A^{-1}(t)\| \leqslant M_0, \quad 0 \leqslant s, t < \infty;$$

3^0) *операторы $A(s)A^{-1}(0)$ сходятся при $s \to \infty$ в равномерной операторной топологии;*

4^0) *оператор $A(s) + \partial / \partial s$ допускает замыкание с F.*

Предположим, что задача (1), (2) *равномерно корректна в пространстве $\hat{C}(E; [0, \infty))$.*

Тогда оператор $U(t, s)$, определенный формулой (3), *обладает следующими свойствами:*

1) *оператор $U(t, s)$ сильно непрерывен по совокупности переменных t и s, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$;*

2) *при любом $x \in E$ существует предел $\lim\limits_{s \to \infty} U(t+s, s)x$, равномерный по t на каждом конечном отрезке;*

3) *на области $D(A)$ оператор сильно дифференцируем по t и по s, причем $\partial U(t, s) / \partial t = U(t, s)A(t)$, $\partial U(t, s) / \partial s = -A(s)U(t, s)$;*

4) $U(s, s) = I$, $\quad s \in [0, \infty)$;

5) $\|U(t, s)\| \leqslant Me^{\omega(t-s)}$, $\quad 0 \leqslant s \leqslant t < \infty$;

6) *оператор $A(s)U(t, s)$ сильно непрерывен на $D(A)$ по совокупности переменных t и s, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$;*

7) *при любом $x_0 \in D(A)$ существует предел $\lim\limits_{s \uparrow 8} A(s)U(t+s, s)x_0$, равномерный по t на каждом конечном отрезке;*

8) $\|A(s)U(t, s)x_0\| \leqslant M_1 e^{\omega(t-s)} \|A(0)x_0\|$, *где* $x_0 \in D(A)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, *$M_1$ — некоторое положительное число.*

Теорема 2. *Пусть в банаховом пространстве E заданы операторы $U(t, s)$, $0 \leqslant s \leqslant t < \infty$, со свойствами 1—8 и $A(s)$ со свойствами 1^0) —3^0) теоремы 1. Пусть $\hat{x} = x(s) \in \hat{C}(E; [0, \infty))$.*

Тогда формула

$$(V(t)(\hat{x})(s)|_{t_0, s_0} \overset{\text{def}}{=} U(t_0 + s_0, s_0)\, x(t_0 + s_0) \tag{4}$$

определяет полугруппу $V(t)$ класса C_0, действующую в пространстве $\hat{C}(E; [0, \infty))$, производящий оператор которой равен $A(s) + \partial / \partial s$.

Замечание. В ([1]) доказано, что задача Коши для уравнения с производящим оператором полугруппы класса C_0 является равномерно корректной. Поэтому, если выполнены условия теоремы 2, то задача (1), (2) равномерно корректна в пространстве $\hat{C}(E; [0, \infty))$.

Теорема 3. *Пусть оператор $A(s)$ обладает свойствами 1^0) — 3^0) теоремы 1. Пусть, кроме того, выполнено следующее:*

1) *оператор $A(s)$ сильно непрерывно дифференцируем на $D(A)$;*

2) *при любом $x_0 \in D(A)$ существует конечный предел $\lim\limits_{s \to \infty} A'(s)x_0$;*

3) $\|A(s)A^{-1}(t)\| \leqslant N$, $0 \leqslant s, t < \infty$;

4) *для резольвенты оператора $A(s)$ выполнено условие*

$$\|R_{A(s)}(\lambda)\| \leqslant 1 / (1 + \lambda), \quad \lambda \geqslant 0.$$

Тогда существует оператор $U(t, s)$, обладающий свойствами 1—8 теоремы 1.

Доказательство. В пространстве E для дифференциального уравнения

$$dx / ds = -A(s)x, \quad 0 \leqslant s < \infty, \tag{5}$$

с оператором $A(s)$, удовлетворяющим условиям теоремы 3, ставим задачу о нахождении решения $x(t, s)$ на отрезке $0 \leqslant s \leqslant t$ с начальным условием

$$x(t, t) = x_0 \in D(A). \tag{6}$$

Возьмем произвольное $T > 0$ и будем решать задачу (5), (6) в треугольнике $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$. Введя новую переменную $\sigma = T - s$ и обозначив $A(T - \sigma) = A_T(\sigma)$, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$dy / d\sigma = A_T(\sigma) y, \quad 0 \leqslant \gamma \leqslant \sigma \leqslant T, \tag{7}$$

$$y(\gamma, \gamma) = x_0. \tag{8}$$

При $\gamma = T - t$ (7), (8) является задачей, в которую перешла задача (5), (6) после замены переменных.

Оператор $A_T(\sigma)$ обладает теми же свойствами, что и оператор $A(s)$, поэтому при любом $T > 0$ задача (7), (8) является равномерно корректной, ([1], гл. II, теорема 3.11). Для нее можно построить эволюционный оператор $U_T(\sigma, \gamma)$, причем оказывается, что функция $U_T(T - s, T - t)x_0$, $x_0 \in E$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, не зависит от T. Поэтому на E можно определить линейный оператор $U(t, s)$ формулой

$$U(t, s) \overset{\text{def}}{=} U_T(T - s, T - t), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{9}$$

Свойства 1, 3–6 оператора $U(t, s)$ получаются непосредственно из соответствующих свойств эволюционного оператора $U_T(\sigma, \gamma)$ равномерно корректной задачи Коши (7), (8).

Чтобы получить свойство 2 оператора $U(t, s)$, надо показать, что операторы $U_{T+s}(\sigma, \gamma)$, которые являются эволюционными операторами, построенными для уравнения

$$dy / d\sigma = A_{T+s}(\sigma) y, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant T, \tag{10}$$

сильно сходятся при $s \to \infty$ равномерно по σ, γ в треугольнике $0 \leqslant \gamma \leqslant \sigma \leqslant \leqslant T$.

В силу условий, наложенных на оператор $A(s)$, задача Коши для уравнения (10) является равномерно корректной и оператор $U_{T+s}(\sigma, \gamma)$ является сильным и равномерным по σ, γ пределом эволюционных операторов $U_{n, T+s}(\sigma, \gamma)$, построенных для уравнения

$$dy / d\sigma = A_{n, T+s}(\sigma) y, \tag{11}$$

где $A_{n, T+s}(\sigma) = -nA_{T+s}(\sigma) R_{A_{T+s}(\sigma)}(n)$. Кроме того, повторяя доказательство теоремы 3.11 из ([1]), можно показать, что $U_{n, T+s}(\sigma, \gamma)$ при $n \to \infty$ сильно сходятся к $U_{T+s}(\sigma, \gamma)$ равномерно по s на полуоси.

С другой стороны, с помощью метода последовательных приближений показывается, что для каждого фиксированного n операторы $U_{n, T+s}(\sigma, \gamma)$ при $s \to \infty$ сильно и равномерно по σ, γ сходятся к оператору $e^{B_n(\sigma - \gamma)}$, где $B_n = -nBR_B(n)$, а B – это замкнутый оператор, являющийся сильным пределом операторов $A(s)$. Оператор B имеет резольвенту, для которой выполнена оценка $\|R_B(n)\| \leqslant 1 / (1 + n)$, $n \geqslant 0$, и является сильным пределом последовательности ограниченных, коммутирующих операторов B_n таких, что $\|e^{B_n(\sigma-\gamma)}\| \leqslant 1$. Поэтому из теоремы 2.9. ([1]), гл. I, следует, что операторы $e^{B_n(\sigma-\gamma)}$ сильно и равномерно по σ, γ сходятся к оператору $U_B(\sigma - \gamma)$, который является эволюционным оператором задачи

$$dx / d\sigma = Bx, \quad x(\gamma) = x_0.$$

Из всего сказанного следует, что при $x_0 \in D(A)$, $\lim\limits_{s\to\infty} U_{T+s}(\sigma, \gamma) x_0 = \lim\limits_{s\to\infty} \lim\limits_{n\to\infty} U_{n, T+s}(\sigma, \gamma) x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{s\to\infty} U_{n, T+s}(\sigma, \gamma) x_0 = U_B(\sigma - \gamma) x_0$, причем сходимость равномерна по $\sigma, \gamma, 0 \leqslant \gamma \leqslant \sigma \leqslant T$. Так как $U(t+s, s) = U_{T+s}(T, T-t)$, то свойство 2 доказано.

Свойство 7 оператора $U(t, s)$ следует из оценки $\|V(t, s)\| \leqslant e^{N(t-s)}$, где $V(t, s) = A(s)U(t, s)A^{-1}(t)$, которая получается из соответствующей оценки для оператора $V_T(\sigma, \gamma) = A_T(\sigma)U_T(\sigma, \gamma)A_T^{-1}(\gamma)$.

Чтобы получить свойство 8, показываем, что операторы $V_{T+s}(\sigma, \gamma)$ при $s \to \infty$ сильно и равномерно по σ, γ сходятся. Для этого решаем интегральное уравнение Вольтерра

$$V_{T+s}(\sigma, \gamma)x_0 = U_{T+s}(\sigma, \gamma)x_0 + \int_{\gamma}^{\sigma} U_{T+s}(\sigma, \tau)A'_{T+s}(\tau)A^{-1}_{T+s}(\tau)V_{T+s}(\tau, \gamma)x_0\,dt,$$

$$x_0 \in E,$$

методом последовательных приближений. Это возможно, так как оператор $U_{T+s}(\sigma, \tau)A'_{T+s}(\tau)A^{-1}_{T+s}(\tau)$ сильно непрерывен по τ и равномерно ограничен. Отсюда будет следовать, что функция $V(t+s, s)x_0 = V_{T+s}(T, T-t)x_0$, $x_0 \in E$, имеет предел при $s \to \infty$, равномерный по $t \in [0, T]$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{s\to\infty} A(s)U(t+s, s)x_0 = \lim\limits_{s\to\infty} V(t+s, s)A(t+s)x_0$, $x_0 \in D(A)$, равномерный по $t \in [0, T]$. Теорема доказана.

Отметим, что связь между операторами $V(t)$ и $U(t, s)$ исследовалась также в работе [2].

Автор выражает глубокую признательность С. Г. Крейну за постоянное внимание и полезные советы.

Воронежский государственный
педагогический институт

Поступило
23 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. [2] C. Mayer, Semin. Choquet, Fac. sci Paris, 1967—1968, 7, № 2 (1969).