Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

С. С. КАЛМЫКОВА

К ТЕОРИИ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕРАВНОВЕСНОГО РЕЗОНАТОРА

(Представлено академиком А. В. Гапоновым-Греховым 26 IV 1972)

Эффекты трансформации электромагнитных волн на неоднородностях активных систем с пучками в качестве неравновесных элементов оказываются существенными для возбуждения с.в.ч. колебаний [1], вывода энергии этих колебаний [2] и ускорения заряженных частиц [3], особенно при отсутствии синхронизма пучка с полем в объеме среды. В настоящей работе исследуется роль взаимной трансформации продольных (l) и поперечных (t) волн * в формировании спектров плазменно-пучковых резонаторов.

1. Рассмотрим отрезок волновода, параллельно оси которого вдоль сильного магнитного поля движется моноэнергетический пучок электронов, имеющий на входе скорость v_0 и плотность n_0. Будем характеризовать электродинамические свойства входного (—) и выходного (+) торцов тензорами коэффициентов трансформации $T_{\alpha\beta}^{\pm}$ (по магнитному полю), где α и β — индексы отраженной и падающей волн, определяемые типом волны (l, t) и значением соответствующего поперечного волнового числа ($k_{\perp n}^{l}$; $k_{\perp n}^{t}$. По определению $T_{\alpha\beta}^{\pm}$ комплексные амплитуды возбуждаемых на входном ($z=0$) и выходном ($z=L$) торцах волн связаны соотношениями

$$A_{\alpha}^{-}(0)=T_{\alpha\beta}^{-}A_{\beta}^{+}(0),\qquad A_{\beta}^{+}(L)=T_{\beta\gamma}^{+}A_{\gamma}^{-}(L).$$

Учитывая связь между $A_{\alpha}^{\pm}(0)$ и $A_{\alpha}^{\pm}(L)$: $A_{\alpha}^{\pm}(L)=A_{\alpha}^{\pm}(0)\exp(ik_{\alpha}L)$, получим систему линейных алгебраических уравнений для этих амплитуд, а также уравнение спектра:

$$A_{\alpha}^{-}(0)=T_{\alpha\beta}^{-}T_{\beta\gamma}^{+}A_{\gamma}^{-}(0)\exp\left[i(k_{\gamma}-k_{\alpha})L\right];\tag{1}$$

$$\left\|\delta_{\alpha\gamma}-T_{\alpha\beta}^{-}T_{\beta\gamma}^{+}\exp\left[i(k_{\gamma}-k_{\alpha})L\right]\right\|=0,\qquad \operatorname{Im}k_{\gamma}>0,\qquad \operatorname{Im}k_{\alpha}<0.\tag{2}$$

Компоненты тензоров $T_{\alpha\beta}^{\pm}$ могут быть получены из решения дифракционной задачи для волны соответствующего типа (l, t) в кусочно-однородном волноводе с пучком (ср. [2]).

2. Сравнительно простой вид, решения (1), (2) имеют при $\Omega_b^2\equiv 4\pi e^2 n_0/(m_{\|}\omega^2)\ll 1$. Для $\Omega_b^2=0$ и идеально проводящих электрических и магнитных торцов из (2) находим известный спектр резонатора без пучка $(\omega_{mn}^{0})^2=[(\pi m/L)^2+(k_{\perp n}^{t})^2]c^2$, $m, n=0, 1, 2, \ldots$ При $\Omega_b^2\neq 0$ резонансные свойства системы сохраняются, если торцевые стенки достаточно эффективно отражают поле ($\operatorname{Re}R\ll 1$; $R\equiv 1-T_{tt}^{+}T_{tt}^{-}$). При большой мощности пучка для исключения неуправляемых изменений свойств пространства взаимодействия (вследствие испарения материала торцов, ионизации паров и появления обратного тока) можно осуществить ввод и вывод пучка через отверстия, наличие которых уменьшает отражательную способность торцов. Расчет тензоров $T_{\alpha\beta}^{\pm}$ в этих условиях оказывается сложным. Поэ-

* Здесь и ниже для краткости названы продольными (l) и поперечными (t) волнами решения самосогласованной системы уравнений, исчезающие (l) и неисчезающие (t) при стремлении к нулю тока пучка.

тому для выяснения существа процесса формирования спектра резонатора с пучком рассмотрим задачу о возбуждении колебаний при прохождении однородного ($\nabla_\perp n_0 = 0$) пучка через резонатор, торцевые стенки которого образованы плазмой ($n_p(z<0) = n_p(z>L) = n_p$).

При $\nabla_\perp n_0 = 0$ волны с различными $k_{\perp n}$ независимы ($k^l_{\perp n} = k^t_{\perp n}$), так что нахождение $T^{\pm}_{\alpha\beta}$ сводится к решению системы из 4 линейных алгебраических уравнений.

Опуская детали вычислений, приведем окончательные результаты для двух наиболее интересных предельных случаев $\omega^2 \ll \omega_H{}^2 \ll \omega\nu \ll \omega_p{}^2$ и $\nu \ll |\omega - \omega_p| \ll \omega_p$ $(\omega_p{}^2 \equiv 4\pi e^2 n_p / m_0)$:

$$R = \begin{cases} 4\Omega_b^2\beta_0 \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha (1 + \beta_0^2\cos^2\alpha)\gamma^6\Gamma^3 + \dfrac{4(1-i)\sqrt{\omega\nu}}{\cos\alpha\omega_p\sqrt{2}}, & \omega^2 \lll \omega_p^2; \\ \dfrac{4}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} - 1} - 8\beta_0\Omega_b^2\gamma^4\Gamma^3, & \omega \sim \omega_p; \end{cases} \tag{3а}$$

$$T \equiv T^+_{\alpha\beta}T^-_{\beta\gamma}\exp\{i(k_\gamma - k_\alpha)L\} =$$

$$= \begin{cases} 2\Omega_b\beta_0\gamma^4 \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha\Gamma^{3/2}[-\sin\theta_l + 2\Omega_b\gamma^4\Gamma^{3/2}(1+\beta_0^2\cos^2\alpha)\cos\theta_l]\exp(i\theta_1), \\ \qquad\qquad \omega^2 \lll \omega_p^2; \\ \dfrac{2\Omega_b\cos\alpha}{\beta_0\sin^2\alpha}\Gamma^{3/2}[-\sin\theta_l + 4\Omega_b\gamma^4\Gamma^{3/2}\beta_0^2\sin^2\alpha\cos\theta_l]\exp(i\theta_t), \quad \omega \sim \omega_p; \end{cases} \tag{3б}$$

$$k = \omega/c, \quad \sin\alpha = k_{\perp n}/k, \quad \gamma(1-\beta_0^2)^{-1/2}, \quad \beta_0 = v_0/c,$$
$$\Gamma = (1 + \beta_0^2\gamma^2\sin^2\alpha)^{-1}; \quad \theta_t = \frac{\omega L}{v_0}(1 - \beta_0\cos\alpha); \quad \theta_l = \Omega_b\frac{\omega L}{v_0}\Gamma^{1/2}.$$

Подставляя (3) в (2), получим следующие выражения для комплексных поправок $\omega^1_{mn} = \omega' + i\omega''$ к частотам ω^0_{mn} при $\gamma^2 \gg 1$:

$$\frac{\omega'}{\omega^0_{mn}} = \Omega_b^2\alpha^2\gamma^2\Gamma^2\left[1 + \cos\theta_t\frac{\sin\theta_l}{\theta_l} - 2\cos\theta_l\frac{\sin\theta_t}{\theta_t}\right], \quad \omega^2 \lll \omega_p^2. \tag{4а}$$

$$\frac{\omega''}{\omega^0_{mn}} = \Omega_b^2\alpha^2\gamma^2\Gamma^2\left[\sin\theta_t\frac{\sin\theta_l}{\theta_l} - \frac{2}{\theta_t}(1 - \cos\theta_l\cos\theta_t)\right] - \frac{1}{2Q}, \tag{4б}$$

$$Q = \frac{L\omega_p^+}{c\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\omega^0_{mn}}{\nu}};$$

$$\frac{\omega'}{\omega^0_{mn}} = 2\alpha^2\gamma^2\Omega_b^4\gamma^6\Gamma^6\left\{\frac{\theta_t^2}{4}\left(\alpha^4\gamma^4 + 2\cos\theta_l + \frac{1}{\alpha^4\gamma^4}\cos 2\theta_t\right) + \right. \tag{5а}$$

$$\left. + 2\cos\theta_t - 1 - \cos 2\theta_l + \theta_t\sin\theta_t\left(\alpha^2\gamma^2 + \frac{2\cos\theta_l - 1}{\alpha^2\gamma^2}\right)\right\} + \frac{\omega_p^2 - (\omega^0_{mn})^2}{\omega_p^2},$$
$$\omega \sim \omega_p;$$

$$\frac{\omega''}{\omega^0_{mn}} = 4\alpha^2\gamma^2\Omega_b^4\gamma^6\Gamma^6\left\{\left(\frac{\alpha^2\gamma^2}{2}\theta_l + \sin\theta_l\right)(1 - \cos\theta_t) + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta_t}{2\alpha^2\gamma^2}(\cos\theta_t - \cos 2\theta_t) + \frac{\theta_l^2}{4}\right\} - \frac{\alpha^2\nu}{8\omega_p}, \quad \theta_l \lll 1; \tag{5б}$$

$$\frac{\omega_p^2 - (\omega^0_{mn})^2}{\omega_p^2} \lesssim \Omega_b^4\gamma^8\theta_t^2.$$

3. Физически взаимодействие продольных и поперечных волн в рассматриваемой системе объясняется следующим образом. Усиление поперечной волны происходит в результате трансформации продольных волн в поперечную на выходном торце резонатора ($T_{tl}{}^+$). В основе этой транс-

формации лежит эффект когерентного переходного излучения * последовательностей сгустков, формируемых полями быстрой и медленной продольных волн. Обратную связь, необходимую для развития неустойчивости, обеспечивает обращенный эффект переходного излучения — трансформация на входном торце резонатора поперечной волны, образованной когерентным сложением полей переходного излучения и отраженной поперечной волны, в быструю и медленную продольные волны (T_{lt}^-). При $\operatorname{Re} T > 0$ продольные волны, генерируемые на выходном торце, усиливают модуляцию пучка и переходное излучение на выходном торце. Однако неустойчивость развивается только при условии, что поток энергии этого излучения ($\sim\operatorname{Re} T$) превосходит потери за счет выноса энергии поперечной волны пучком ($R > 0$) и конечной проводимости стенок ($\sim 1/Q$).

Именно обусловленное наличием пучка понижение отражательной способности магнитных торцов ($R \sim |\varepsilon_{\|}|^{1/2}$) увеличивает скорость спада инкремента с уменьшением тока по сравнению со случаем $\omega^2 \ll \omega_p^2$.

В предельном случае малых токов ($\theta_l \ll 1$) соотношения (2) — (4) дают инкременты работ ([4], [5]), что подтверждает определяющую роль эффектов трансформации в рассматриваемых условиях (см. ([6])).

Эффекты переходного излучения каждой из продольных волн более существенны ($T_{lt}^+ T_{lt}^- \sim n_0^{1/2}$), чем вынос пучком энергии поперечной волны ($R \sim n_0$). Однако результирующий вклад переходного излучения в инкременты (4), (5) уменьшается из-за интерференции полей обеих продольных волн. С ростом тока разность между фазовыми скоростями этих волн увеличивается. Соответствующее искажение картины поля приводит сначала к насыщению скорости роста, а затем и к уменьшению инкремента с увеличением плотности пучка. Условие пренебрежения этим эффектом $\theta_l \simeq \simeq \Omega_b v^2 \theta_l \Gamma^{1/2} \ll 1$ в релятивистском случае может быть не выполнено даже при $\Omega_b^2 \ll 1$. Например, для параметров работы ([5]) ($I_0 = 2$ка, $\gamma = 3$, $\lambda = 3$ см, $\theta_t = {}^5/_2\pi$; $Q = 500$) при равномерном распределении тока по сечению $\theta_l \simeq 0{,}95$; соответствующее уменьшение инкремента составляет 40%. При $dn_0/dr < 0$ θ_l возрастает. Так, для однородного пучка радиуса $b \leqslant 1$ см $k_{\perp 1}{}^t \simeq 1{,}3/b > k_{\perp 1}{}^t \simeq 2{,}4/a$ (a — радиус резонатора); при этом $\theta_l \simeq 2{,}0$. Инкремент для этого случая определяется решением (2), в котором $T^{\pm}_{\alpha,\beta}$ должны быть вычислены с учетом условий ввода и вывода пучка.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
14 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Гапонов, М. И. Петелин, В. К. Юлпатов, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, **10**, 1414 (1967). [2] С. С. Калмыкова, В. И. Курилко, ПММ, **33**, 638 (1969). [3] Л. Н. Казанский, А. В. Кислецов, А. Н. Лебедев, Атомная энергия, **30**, 27 (1971). [4] J. J. Müller, E. Rostas, Helv. phys. acta, **3**, 435 (1940). [5] В. К. Юлпатов, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, **13**, 1784 (1970). [6] М. И. Петелин, там же, **13**, 1586 (1970).

* *Возможность привлечения понятия индуцированного переходного излучения для объяснения самовозбуждения ряда генераторов с.в.ч. указана в* ([1]).