Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 5

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Э. И. КАСИМОВ

ОБ ОДНОЙ БАЗИСНОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 4 V 1972)

В предлагаемой статье изучается вопрос о том, как влияет на свойство быть базисом последовательное умножение известной базисной системы аналитических функций во всей плоскости, на функции $\{\psi_k(z)\}^{m-1}$ в зависимости от природы самих функций $\{\psi_k(z)\}_{k=0}^{m-1}$. Метод, лежащий в основе наших исследований, был впервые применен М. А. Евграфовым [1, 2] при решении задач о полноте систем аналитических функций, близких к некоторым известным системам. Сущность метода заключается в приведении задач этого рода к некоторым операторным уравнениям, для которых устанавливается существование решений. Следуя М. А. Евграфову, через $\mathfrak{A}(|z|<R)$, $0<R\leqslant\infty$, обозначим класс аналитических функций, регулярных внутри круга $|z|<R$, в котором определена сходимость как равномерная сходимость в любой замкнутой области, лежащей внутри круга $|z|<R$.

Определение. Систему функций $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ из $\mathfrak{A}(|z|<R)$ мы назовем базисом в $\mathfrak{A}$, если любая $f(z)$ из $\mathfrak{A}$ может быть представлена в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varphi_k(z)$$

и притом единственным образом.

Пусть $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ — базисная система в $\mathfrak{A}(|z|<R)$. Возьмем m функций $\psi_0(z),\ \psi_1(z),\dots,\psi_{m-1}(z)$ из $\mathfrak{A}(|z|<R)$ и рассмотрим систему функций

$$\varphi_0(z)\psi_0(z),\quad \varphi_1(z)\psi_1(z),\dots,\quad \varphi_{m-1}(z)\psi_{m-1}(z),\quad \varphi_m(z)\psi_0(z),\dots \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что система (1) не обязательно образует базис в любом круге $|z|<R$. Нашей целью является определение точного радиуса круга, в котором система (1) образует базис.

Введем обозначения:

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix}\psi_0(z) & \psi_1(z) & \dots & \psi_{m-1}(z)\\ \psi_0(\omega z) & \omega\psi_1(\omega z) & \dots & \omega^{m-1}\psi_{m-1}(\omega z)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \psi_0(\omega^{m-1}z) & \omega^{m-1}\psi_1(\omega^{m-1}z) & \dots & \omega^{(m-1)^2}\psi_{m-1}(\omega^{m-1}z)\end{vmatrix},\quad \omega=e^{2\pi i/m};$$

$\Delta_{l,0}(z),\quad \Delta_{l,1}(z),\dots,\quad \Delta_{l,m-1}(z)$ — алгебраические дополнения элементов $(l+1)$-го столбца определителя $\Delta(z)$.

Имеет место следующее утверждение

Теорема 1. *Система* (1) *образует базис в круге* $|z|<\alpha_0$, $\alpha_0=\min(|z_0|,\ |z_1|,\dots,\ |z_{m-1}|)$, *где* z_ν, $\nu=0,\ 1,\dots,\ m-1$,*— ближайшие к началу полюсы соответственно функций*

$$Q_l(z)=\frac{\Delta_{l,0}(z)+\Delta_{l,1}(z)+\dots+\Delta_{l,m-1}(z)}{\Delta(z)},\quad l=0,1,\dots,m-1.$$

Сначала докажем следующий критерий, позволяющий свести задачу о разложении данной функции по базису к решению некоторых операторных уравнений в пространстве $\mathfrak{A}(|z|<R)$.

Теорема 2. *Пусть функции* $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *регулярны в круге* $|z|<R$ *и удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty} |P_n(z)|^{1/n} = |z|, \quad |z|<R; \tag{2}$$

причем стремление к пределу равномерно по z *в любой замкнутой части круга* $|z|<R$. *Определим оператор* A, *действующий в пространстве* $\mathfrak{A}(|z|<R)$ *при каждом* R, *равенствами*

$$Az^n = P_n(z), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Для того чтобы система функций $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ *образовывала базис в пространстве* $\mathfrak{A}(|z|<R)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение*

$$Af = g$$

было однозначно разрешимо в $\mathfrak{A}(|z|<R)$ *для любой* $g(z) \in \mathfrak{A}(|z|<R)$.

Доказательство. Мы приведем доказательство в полном виде, хотя достаточность доказана в более общем случае в работе ([2]), см. § 2, стр. 118.

Достаточность. Так как для каждой $g(z) \in \mathfrak{A}(|z|<R)$ существует единственная функция $f(z) \in \mathfrak{A}(|z|<R)$, удовлетворяющая уравнению $Af = g$, то

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ причем } \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} < \frac{1}{R}; \tag{3}$$

но

$$g(z) = Af = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z),$$

причем из (2) и (3) следует, что последний ряд сходится в круге $|z|<R$. Это и означает (в силу произвольности $g(z)$), что система $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $\mathfrak{A}(|z|<R)$.

Необходимость. Пусть система $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $\mathfrak{A}(|z|<R)$. Тогда произвольную функцию $g(z) \in \mathfrak{A}(|z|<R)$ можно разложить в ряд по $P_n(z)$ и притом единственным образом:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z).$$

Имеем

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A z^n = A \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = Af,$$

т. е. уравнение $Af = g$ допускает единственное (в силу единственности разложения $g(z)$), решение $f(z) \in \mathfrak{A}(|z|<R)$ для любого $g(z) \in (|z|<R)$. Теорема доказана. С помощью этой теоремы можно решить поставленную задачу. Излагая в основном принципиальную сторону вопроса, мы, для упрощения выкладок, приведем доказательство теоремы в случае $m=2$.

Теорема 1*. *Система функций*

$$\varphi_0(z)\psi_0(z), \quad \varphi_1(z)\psi_1(z), \ldots, \quad \varphi_{2n}(z)\psi_0(z), \quad \varphi_{2n+1}(z)\psi_1(z), \ldots \tag{4}$$

образует базис в круге $|z|<\alpha_0$, $\alpha_0 = \min(|z_0|, |z_1|)$, *где* z_0 *и* z_1 — *ближай-*

шие к началу полюсы соответственно функций

$$Q_0(z) = \frac{\psi_1(-z) + \psi_0(-z)}{\psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_1(z)\psi_0(-z)}, \quad Q_1(z) = \frac{\psi_1(z) - \psi_0(z)}{\psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_1(z)\psi_0(-z)}.$$

Доказательство. Пусть A — оператор, действующий в пространстве функций $\mathfrak{A}(|z| < R)$ и определенный равенствами

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

$$Af(z) = a_0\varphi_0(z)\psi_0(z) + a_1\varphi_1(z)\psi_1(z) + \ldots + a_{2n}\varphi_{2n}(z)\psi_0(z) + \\ + a_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z)\psi_1(z) + \ldots$$

В силу теоремы 2, достаточно доказать, что уравнение $Af = g$ имеет единственное решение $f(z) \in \mathfrak{A}(|z| < R)$ для любой $g(z) \in \mathfrak{A}(|z| < R)$, если $R < \alpha_0$. Через A_0 обозначим оператор, отвечающий базисной системе $\{\varphi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $\mathfrak{A}(|z| < R)$. Так как

$$\tfrac{1}{2}[f(z) + f(-z)] = a_0 + a_2 z^2 + \ldots,$$

$$\tfrac{1}{2}[f(z) - f(-z)] = a_1 z + a_3 z^3 + \ldots,$$

то

$$A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) + f(-z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}\varphi_{2n}(z),$$

$$A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) - f(-z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\varphi_{2n+1}(z).$$

Имеем

$$Af(z) = \psi_0(z) A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) + f(-z)] + \psi_1(z) A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) - f(-z)],$$
$$Af(-z) = \psi_0(-z) A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) + f(-z)] - \psi_1(-z) A_0 \cdot \tfrac{1}{2}[f(z) - f(-z]).$$

Из этих равенств находим

$$\tfrac{1}{2}A_0[f(z) + f(-z)] = \frac{Af(z)\psi_1(-z) + Af(-z)\psi_1(z)}{\psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_1(z)\psi_0(-z)},$$
$$\tfrac{1}{2}A_0[f(z) - f(-z)] = \frac{Af(z)\psi_0(-z) - Af(-z)\psi_0(z)}{\psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_1(z)\psi_0(-z)}.$$

Далее, в силу линейности оператора, имеем

$$A_0 f = \frac{Af(z)[\psi_1(-z) + \psi_0(-z)] + Af(-z)[\psi_1(z) - \psi_0(z)]}{\psi_0(z)\psi_1(-z) + \psi_1(z)\psi_0(-z)}. \quad (5)$$

Так как система $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует базис в $\mathfrak{A}(|z| < R)$ при любом R, то, по теореме 2, оператор A_0 имеет обратный, т. е. уравнение (5) разрешимо, если только функция, стоящая в правой части, регулярна в круге $|z| < R$. А это заведомо будет так, если $R < \alpha_0$, что и доказывает теорему.

Следствие 1. *Необходимое и достаточное условие* $|z| < \alpha_0$ *можно заменить более простым достаточным условием* $|z| < \beta_0$, *где* β_0 — *модуль ближайшего к началу нуля функции*

$$W(z) = \begin{vmatrix} \psi_0(z) & \psi_1(z) \\ \psi_0(-z) & -\psi_1(-z) \end{vmatrix}$$

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
4 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, сер. матем., **17**, 421 (1953). [2] М. А. Евграфов, Тр. Московск. матем. общ., 90 (1956).