

УДК 519.21

МАТЕМАТИКА

Ю. Л. ДАЛЕЦКИЙ, С. Н. ПАРАМОНОВА

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПО НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 IV 1972)

1. Пусть $(T, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство, $\mathfrak{A}_0$ — алгебра множеств, порождающая σ -алгебру $\mathfrak{A}$. Рассмотрим случайную аддитивную функцию множеств μ на $\mathfrak{A}_0$, имеющую нормальное распределение, определяемое соотношениями

$$M_\mu(\Delta) = 0, \quad M_\mu(\Delta')\mu(\Delta'') = \beta(\Delta' \times \Delta''), \quad \Delta, \Delta', \Delta'' \in \mathfrak{A}_0.$$

Предположим, что корреляционная функция множеств $\beta(\Delta' \times \Delta'')$ имеет ограниченную вариацию и счетно аддитивное продолжение на $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$, которое мы будем обозначать тем же символом β .

Целью настоящей заметки является построение стохастических интегралов вида

$$J(f; \mu) = \int_T f(u; t) \mu(dt)$$

и некоторых более общих, когда μ и f — векторные функции. Частным случаем этих интегралов являются интегралы Ито (см., например, (1)). Однако мы не налагаем на рассматриваемые функции f каких-либо требований типа независимости от будущего, что приводит к усложнению оценок и дополнительных требованиям на гладкость f .

Пусть $T = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$, $\Delta_k \in \mathfrak{A}_0$, $\Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset$, $k \neq j$, — какое-либо разбиение пространства T , $\chi_{\Delta_k}(t)$ — индикатор множества Δ_k .

Для ступенчатой функции $f(\mu; t) = \sum_{k=1}^n f_k(\mu) \chi_{\Delta_k}(t)$ естественно полагаем

$$J(f; \mu) = \sum_{k=1}^n f_k(\mu) \mu(\Delta_k).$$

На функции из более широкого класса определение интеграла распространяется, как и обычно, при помощи предельного перехода в смысле среднего квадратичного*.

2. Для получения оценок, нужных при проведении предельного перехода, используем одну формулу типа интегрирования по частям для средних по гауссовой мере (частные случаи этой формулы (см. (2-4)).

Пусть ν — гауссова мера в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$ — вложенное в $\mathcal{H}$ гильбертово пространство со скалярным произведением $(x, y)_0 = (B^{1/2}x, B^{1/2}y)$, где B — корреляционный оператор меры ν . Заметим, что

* Другая конструкция стохастического интеграла для нелинейных функционалов от «белого шума», также не использующая независимости от будущего, излагалась недавно А. В. Скороходом в докладе на семинаре в Институте математики АН УССР.

оператор Гильберта — Шмидта, действующий из $\mathcal{H}_0$ в какое-нибудь гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, имеет ν -измеримое линейное расширение на $\mathcal{H}$.

Лемма. Пусть $f(x)$ — ν -измеримая на $\mathcal{H}$ функция со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, дифференцируемая по направлениям из $\mathcal{H}_0$. Пусть далее $f'(x)$ — ν -измеримая функция, значениями которой являются операторы Гильберта — Шмидта из $\mathcal{H}_0$ в $\mathfrak{H}$, A — оператор Гильберта — Шмидта из $\mathcal{H}_0$ в $\mathfrak{H}$. Предположим, что выполнены условия

$$\int_{\mathcal{H}} \|f(x)\|^2 \nu(dx) < \infty, \quad \int_{\mathcal{H}} \|f'(x)\|^2 \nu(dx) < \infty$$

Тогда имеет место соотношение

$$\int_{\mathcal{H}} (f(x), Ax)_{\mathfrak{H}} \nu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \text{Sp}[f'(x) A^*] \nu(dx). \quad (1)$$

Формула (1) проверяется для полиномов и конечномерных операторов A и затем доказывается в общем случае при помощи предельного перехода. Эта формула обобщается также и на случай, когда пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0$ банаховы. Аналогичные формулы можно получить для интегралов от полилинейных функционалов вида $f(x) (A_1 x, \dots, A_n x)$.

3. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_\nu$, состоящее из (классов) вещественных $\mathfrak{A}$ -измеримых функций $\varphi(t)$, $t \in T$, со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{T \times T} \beta(dt \times d\tau) \varphi(t) \psi(\tau).$$

Предполагается, что это скалярное произведение не вырождено.

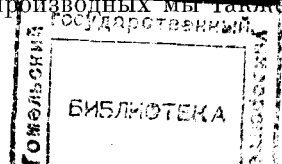
Для функций $\varphi(t)$ легко определяются понимаемые в среднем квадратичном интегралы $J(\varphi; \mu)$ так, что выполняется соотношение

$$MJ(\varphi; \mu)J(\psi; \mu) = \langle \varphi, \psi \rangle.$$

Каждой функции $\varphi \in \mathcal{H}_\nu$ сопоставляется σ -аддитивная мера $\mu_\varphi(\Delta) = \langle \varphi, \chi_\Delta \rangle$ на $\mathfrak{A}$. Положим $\mu_\varphi = S^{-1}\varphi$ и введем при помощи оператора S^{-1} в совокупности $\mathcal{L}_0$ мер μ_φ структуру гильбертова пространства. Пусть $\mathcal{L}$ — совокупность аддитивных функций на $\mathfrak{A}_0$. Случайная функция μ определяет на $\mathcal{L}$ слабое распределение, которое продолжается до гауссовой меры ν на некотором линейном расширении $\tilde{\mathcal{L}} \supset \mathcal{L}$. При этом оператор S продолжается до ν -измеримого линейного оператора из $\tilde{\mathcal{L}}$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_\nu$, являющееся гильберто-шмидтовским расширением $\mathcal{H}_\nu$, и вносит в это пространство гауссову меру ν_0 , корреляционным оператором которой служит тождественный оператор в $\mathcal{H}_\nu$.

Будем называть функцию $f(x)$, $x \in \mathcal{H}_\nu$, k раз дифференцируемой, если она ν_0 -почти везде дифференцируема соответствующее число раз вдоль $\mathcal{H}_\nu$, ν_0 -измерима вместе с производными и эти производные, которые по определению являются полилинейными отображениями пространства $\mathcal{H}_\nu$, продолжаются до ν_0 -измеримых полилинейных отображений пространства $\mathcal{H}_\nu$. Отметим, что всеми этими свойствами обладают, в частности, функции, непрерывно дифференцируемые по Фреше на $\mathcal{H}_\nu$. Ядро, соответствующее производной $f^{(k)}(x)$ (возможно, обобщенное) назовем вариационной производной функции $f(x)$ и обозначим символом $\delta^k f(x) / \delta x(t_1) \dots \delta x(t_k)$. Функцию $f(x)$, $x \in \mathcal{H}_\nu$, отнесем к классу C^k , если она дифференцируема k раз и ее вариационные производные до порядка k включительно являются $\mathfrak{A}$ -измеримыми функциями на $\mathcal{H}_\nu$.

Аналогичные определения можно ввести для функций $f(\mu)$, $\mu \in \mathcal{L}$, понимая под их производными производные вдоль гильбертова пространства $\mathcal{L}_0$. Ядра этих производных мы также будем называть вариационными



производными и обозначать $\delta^k f(\mu) / \delta \mu(t_1) \dots \delta \mu(t_k)$. Нетрудно проверить, что функция $f_s(\mu) = f(S_\mu)$, $\mu \in \mathcal{L}$, принадлежит классу C^k , если $f(x)$ принадлежит этому классу. При этом справедливо равенство

$$\frac{\delta^k f(S_\mu)}{\delta x(t_1) \dots \delta x(t_k)} = \frac{\delta^k f_s(\mu)}{\delta \mu(t_1) \dots \delta \mu(t_k)}.$$

Из формулы (1) можно вывести соотношения

$$M f_s(\mu) \mu(\Delta) = \int_T M \frac{\delta f_s(\mu)}{\delta \mu(t)} \beta(dt \times \Delta), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & M f_s(\mu) \mu(\Delta') \mu(\Delta'') = \\ &= \int_T \int_T M \frac{\delta^2 f_s(\mu)}{\delta \mu(t) \delta \mu(\tau)} \beta(dt \times \Delta') \beta(d\tau \times \Delta'') + M f_s(\mu) \beta(\Delta' \times \Delta'') \end{aligned} \quad (3)$$

для функций соответственно классов C^1 и C^2 .

Отметим, что к числу функций класса C^∞ относятся функции вида

$$f(\mu) = \int_{T^n} \varphi_n(t_1, \dots, t_n) \mu(dt_1) \dots \mu(dt_n),$$

где $\varphi_n(t_1, \dots, t_n)$ — элемент тензорной степени $\otimes \mathcal{H}_\beta^n$ пространства $\mathcal{H}_\beta$.

4. Используя формулы (2) и (3), можно оценить интегралы от ступенчатых по t функций $f(\mu; t)$ класса C^2 и затем проделать предельный переход. Это приводит к следующему результату.

Теорема. Пусть $f(\mu; t)$, $\mu \in \mathcal{L}$, $t \in T$, — функция класса C^2 по μ и $\mathcal{A}$ -измерима по t . Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} & \int_{T^2} |M f(\mu; t) f(\mu; \tau)| \text{Var} \beta(dt \times d\tau) < \infty, \\ & \int_{T^2} \left| M \frac{\delta f(\mu; t)}{\delta \mu(\tau)} \right| \text{Var} \beta(dt \times d\tau) < \infty, \\ & \int_{T^4} \left| M \frac{\delta^2 f(\mu; t) f(\mu; \tau)}{\delta \mu(t_1) \delta \mu(\tau_1)} \right| \text{Var} \beta(dt \times dt_1) \text{Var} \beta(d\tau \times d\tau_1) < \infty. \end{aligned}$$

Тогда интеграл $J(f; \mu)$, понимаемый как предел в среднем квадратичном интегралов от ломаных, аппроксимирующих $f(\mu; t)$ вместе с производными первого и второго порядка по μ , существует и выполняются соотношения

$$MJ(f; \mu) = \int_{T^2} M \frac{\delta f(\mu; t)}{\delta \mu(\tau)} \beta(d\tau \times dt), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M |J(f; \mu)|^2 &= \int_{T^2} M [f(\mu; t) f(\mu; \tau)] \beta(dt \times d\tau) + \\ &+ \int_{T^4} M \frac{\delta^2 f(\mu; t) f(\mu; \tau)}{\delta \mu(t_1) \delta \mu(\tau_1)} \times \beta(dt \times dt_1) \beta(d\tau \times d\tau_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Для сокращения изложения мы рассматривали скалярный случай, однако приведенные выше рассуждения обобщаются и на тот случай, когда функция $f(\mu; t)$ и аддитивная функция множеств μ принимают значения из сепарабельного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Корреляционное ядро $\beta(\Delta \times \Delta')$ при этом является ограниченным оператором в $\mathcal{H}$, а его вариация рассматривается в следовой норме.

Другое обобщение связано с интегрированием по функции μ функции $f(x, \mu; t)$, зависящей от распределенной по нормальному закону пары (x, μ) , где x — элемент некоторого банахова пространства X .

5. Пусть $T = [a, b]^n \subset R^n$, $x(t)$ — гауссово случайное поле в T со скалярными или векторными значениями, корреляционная функция которого имеет ограниченную вариацию. Поле $x(t)$ естественно порождает случайную функцию множеств на прямоугольниках. Изложенные выше результаты применимы к этому случаю. В частности, при $n = 1$ всем требованиям удовлетворяет винеровский процесс. Если интегрируемая функция зависит лишь от прошлого, то оценка (5) превращается в обычную оценку для интеграла Ито. Отметим, что при рассматриваемых нами условиях интеграл не зависит от выбора точек $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ в интегральных суммах $\sum_k f(\mu; \tau_k) [x(t_k) - x(t_{k-1})]$.

Особо отметим случай, когда $f(x; t) = F(x(t))$ есть функция значения процесса x в точке t . При этом вариационные производные функции f являются обобщенными функциями и условия теоремы нарушаются. Тем не менее и в этом случае при помощи описанных выше методов можно показать сходимость интегральных сумм для достаточно гладких функций F , хотя результат на этот раз уже будет зависеть от выбора точек τ_k в интегральной сумме. Один из вариантов такого интеграла, когда функция одной компоненты двумерного гауссова процесса интегрируется по другой компоненте, другим методом рассматривался в (5).

Авторы выражают благодарность А. В. Скороходову за полезное обсуждение.

Киевский политехнический институт
им. 50-летия Великой Октябрьской социалистической
революции

Поступило
27 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, 1965. ² Е. А. Новиков, ЖЭТФ, 47, 5 (1964). ³ М. Д. Донскер, Сборн. пер., Математика, 11, 3 (1967). ⁴ K. Furutsu, J. Res. Nat. Bur. Stand., D 67, № 3, 303, (1963). ⁵ Е. А. Беговатов, Теория вероятн. и ее примен., 14, 2 (1969).